Ryszard Zieliński

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI DLA FRAKCJI

To takie proste, więc dlaczego tak źle tego uczymy?

Seminarium IMPAN 23.X.2008

Problem. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu θ, jeżeli

$$P_\theta\{X=1\} = \theta = 1 - P_\theta\{X=0\}, \quad 0 < \theta < 1$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ – próba z rozkładu (1)

$S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ jest minimalną i zupełną statystyką dostateczną

Interesuje nas przedziałowa estymacja parametru θ, o którym wiemy tylko to, że "leży gdzieś w przedziale $(0,1)$": model statystyczny z przestrzenią parametrów $\theta \in (0,1)$.

Definicja. Losowy przedział

$$\left(\underline{\theta}(S_n), \overline{\theta}(S_n)\right)$$

nazywamy *przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie ufności γ*, jeżeli

$$P_\theta\{\underline{\theta}(S_n) \le \theta \le \overline{\theta}(S_n)\} \ge \gamma \quad \text{dla każdego } \theta \in (0,1)$$

Fisz (1967) w rozdz. 13.8 (s. 509)

Lehmann (1968) w rozdz. III.5 (s. 104 - rodzina zbiorów ufności)

Bartoszewicz (1996) w rozdz. V.9 (s. 296 - rodzina zbiorów ufności)

Niemiro (1999) w rozdz. 6 (s. 151)

Trybuła (2001) w rozdz. III.13 (s. 179)

Magiera (2007) w rozdz. 3 (s. 83)

Inna definicja (formalnie poprawna):

$$P_\theta\{\underline{\theta}(S_n) \leq \theta \leq \overline{\theta}(S_n)\} = \gamma \quad \text{dla każdego } \theta \in (0,1)$$

Gajek (1996) rozdz. 4.5 (s. 82). Ale (kilka wierszy niżej): *Uniwersalny przedział ufności z nierówności Czebyszewa*

$$P\left(\bar{X}_n - \varepsilon < \theta < \bar{X}_n + \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Krzyśko (2004) rozdz. 2.6 (s. 131, Def. 2.11)

Plucińska (2000) rozdz. 5.9 (s. 268, Def. 5.62) [ale *gdy X jest zmienną losową typu skokowego, nowa Def. 5.65 z nierównością* $\geq$]

Fisz (1967), Magiera (2007) i Trybuła (2001) w komentarzu do definicji z $\geq$ dodają *dla zmiennych losowych ciągłych piszemy* $=$

Silvey (1978) dwa pojęcia: p.ufn. na poziomie γ, wtedy $=$ oraz p.ufn. "na poziomie ufności co najmniej γ", wtedy $\geq$

W niektórych podręcznikach przedziały ufności są wprowadzane w sposób opisowy, bez jawnego formułowania definicji, ale za to z obszerniejszą interpretacją i przykładowymi konstrukcjami (Cramér(1958) w rozdz. XI.34, Zubrzycki (1966) w rozdz. VIII.50, Klonecki (1999) w rozdz. 10, Koronacki (2004) w rozdz. 3.3).

Ale zdarza się i tak:

Cytuję:

Zadaniem estymacji przedziałowej jest skonstruowanie na podstawie próby losowej przedziału, o którym można z dużą dozą przekonania powiedzieć, iż zawiera prawdziwą wartość szacowanego parametru... Jeżeli próba nie została jeszcze zaobserwowana, jest to przedział o losowych końcach... estymator przedziałowy jest wyznaczony przez dwie zmienne losowe, w przeciwieństwie do estymatora punktowego, który jest pojedynczą zmienną losową. ...

Otrzymane na postawie zaobserwowanej próby wartości estymatorów przedziałowych będziemy nazywali **przedziałami ufności**.

Zaobserwowawszy próbę losową $X_1, X_2, \ldots, X_n$, czyli mając realizację tej próby $x_1, x_2, \ldots, x_n$, możemy obliczyć realizację średniej w próbie, $\bar{x}$ i podać **przedział ufności dla** μ **na poziomie ufności** $1-\alpha$

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{3.22}$$

Nadal cytuję:

Ścisłe znaczenie sformułowania "zadana doza przekonania", które w statystyce zastępuje się pojęciem "zadanego poziomu ufności", zostanie wyjaśnione w dalszym ciągu tego podrozdziału.
...
Wprowadzenie pojęcia poziomu ufności $1-\alpha$, niejako w miejsce prawdopodobieństwa $1-\alpha$, jest potrzebne i nie jest mnożeniem bytów ponad potrzebę. O prawdopodobieństwie można mówić tylko wtedy, gdy mamy do czynienia ze zmiennymi losowymi. Gdy mówimy o realizacjach zmiennych losowych, mówienie o prawdopodobieństwie traci sens. Przedział (3.22) nie jest już przedziałem losowym, jest zaś zwykłym przedziałem na osi liczbowej i albo zawiera nieznaną liczbową wartość średnią μ , albo nie. Jak zatem rozumieć pojęcie poziomu ufności?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, wróćmy do równości

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

która opisuje prawdopodobieństwo zajścia dobrze określonego zdarzenia losowego. Odwołajmy się do częstościowej interpretacji prawdopodobieństwa, która powiada, że gdybyśmy dysponowali nie jedną a 1 milionem średnich próbkowych $\bar{X}$, to oczekiwalibyśmy zajścia zdarzenia

$$\mu \in \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

z częstością $(1-\alpha)10^6/10^6 = (1-\alpha)$. I tak właśnie należy rozumieć pojęcie poziomu ufności: dla około $100(1-\alpha)\%$ prób losowych obliczony przedział ufności zawiera szacowany parametr.

Definicje **formalnie niepoprawne**.

Przestrzeń statystyczna z rodziną rozkładów $\mathcal{P}$ lub $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$

Koronacki (2004, s.212):

"Jak zobaczyliśmy we wszystkich wcześniejszych przypadkach, naszym celem jest znalezienie przy dowolnym ustalonym poziomie ufności $1-\alpha$ takich dwóch funkcji $h_1(\cdot)$ i $h_2(\cdot)$ próby losowej, aby była spełniona równość

$$P\left(h_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq h_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = 1-\alpha,$$

gdzie θ jest parametrem, dla którego konstruujemy przedział ufności".

Dla formalnej poprawności wystarczy zamiast P napisać P_θ i dopisać kwantyfikator "dla każdego θ".

Posługiwanie się symbolem P w statystyce, bez wyraźnego wskazania o które $P \in \mathcal{P}$ chodzi, brak kwantyfikatora (czy chodzi o jakieś jedno, szczególne P, czy o każde $P \in \mathcal{P}$) uważam za formalną niepoprawność. Taka sama niedokładność jest u Fisza (1967, s. 509), Kali (2002, s. 52) i Plucińskiej (2000, s. 268).

Przedział ufności. Przedziały ufności wymyślił Jerzy Spława-Neyman. Neyman (1934) pisze, że rozwiązanie problemu estymacji, o którym mówił,

"*consists in determining certain intervals, which I propose to call the confidence intervals*".

Konstrukcja: Cramér (1958), Zubrzycki (1966)

Cytuję ogólną, przejrzystą i świetnie nadającą się do dydaktyki nawet na elementarnym poziomie konstrukcję przedziału ufności podaną przez Zubrzyckiego (1966, s. 306); w poniższym cytowaniu używam oryginalnych oznaczeń Zubrzyckiego, więc poszczególne symbole mogą oznaczać coś innego niż w podstawowym tekście tej prezentacji:

Konstrukcja przedziałów ufności... jest bardzo ogólna i przy pewnych założeniach co do ciągłości rozkładów da się powtórzyć dla dowolnego parametru. Można ją też stosować w przypadku kilku parametrów jednocześnie i budować dla nich obszary ufności. Niech bowiem X będzie wielowymiarową przestrzenią euklidesową punktów $x = (x_1, \ldots, x_n)$ reprezentujących wyniki obserwacji. Niech dalej Ω będzie przestrzenią wartości parametru θ (liczbowego lub wektorowego) wyznaczającego w X rozkład o gęstości $f_\theta(x)$. Ustalmy α z przedziału $0 < \alpha < 1$ i dla każdego $\theta \in \Omega$ wybierzmy zbiór $S_\theta \subset X$, taki że

$$\int_{S_\theta} f_\theta(x)dx = \alpha.$$

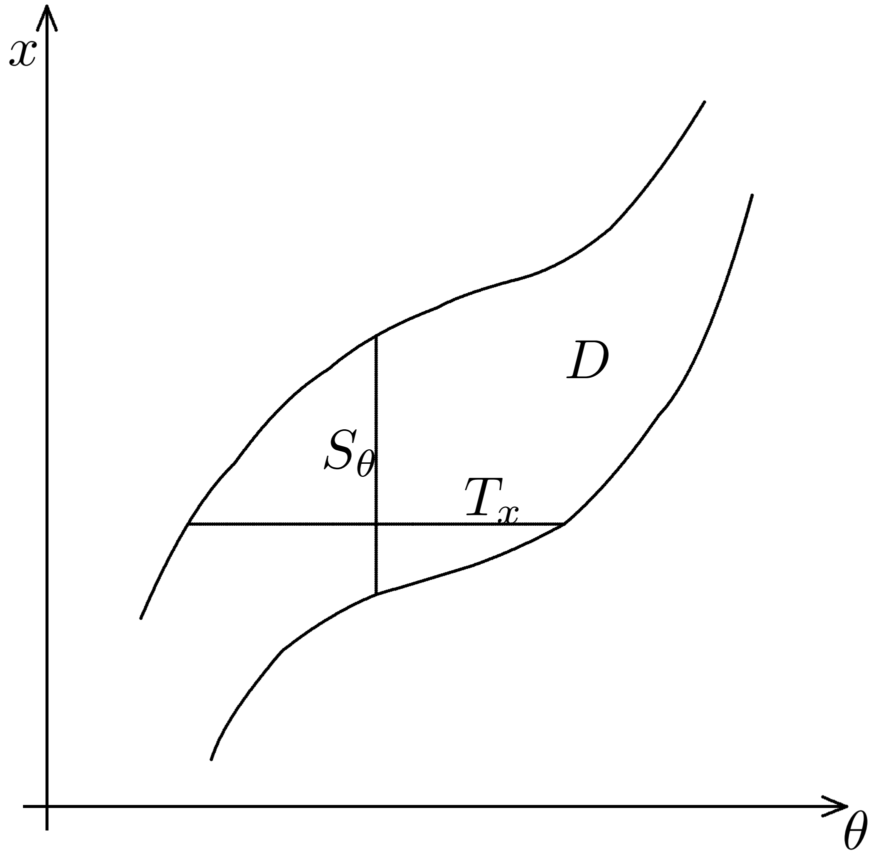
Rozważmy teraz w przestrzeni $X \times \Omega$ zbiór D tych wszystkich punktów (x, θ), dla których jednocześnie $\theta \in \Omega$ i $x \in S_\theta$. Wówczas (porównaj rysunek Z) dla ustalonego $\theta \in \Omega$ zbiór $\{(x, \theta) : x \in S_\theta\}$ jest przekrojem zbioru D równoległym do osi x. Zbiór D ma tę własność, że niezależnie od tego, czy parametr θ ma ustaloną wartość, czy też uważamy go za zmienną losową o jakimś rozkładzie prawdopodobieństwa, losowy punkt (x, θ) będzie należał do D z prawdopodobieństwem α. A teraz zapiszmy przynależność punktu (x, θ) do D inaczej, biorąc pod uwagę przekroje zbioru D równoległe do osi θ. 0znaczmy

$$T_x = \{\theta : (x, \theta) \in D\}.$$

Wówczas trzy zapisy

$$\theta \in \Omega, \quad x \in S_\theta,$$
$$(x, \theta) \in D,$$
$$x \in X, \quad \theta \in T_x$$

określają na trzy sposoby przynależność punktu (x, θ) do zbioru D. Wobec tego T_x są poszukiwanymi przez nas przedziałami ufności o poziomie ufności α, mającymi tę własność, że niezależnie od tego, czy θ jest ustalone, czy losowe, z ustalonym prawdopodobieństwem α losowy przedział T_x, odpowiadający obserwacji x, zawiera wartość parametru θ, określającą rozkład, według którego losowano x.



Rys. Z. Ogólna konstrukcja przedziału ufności

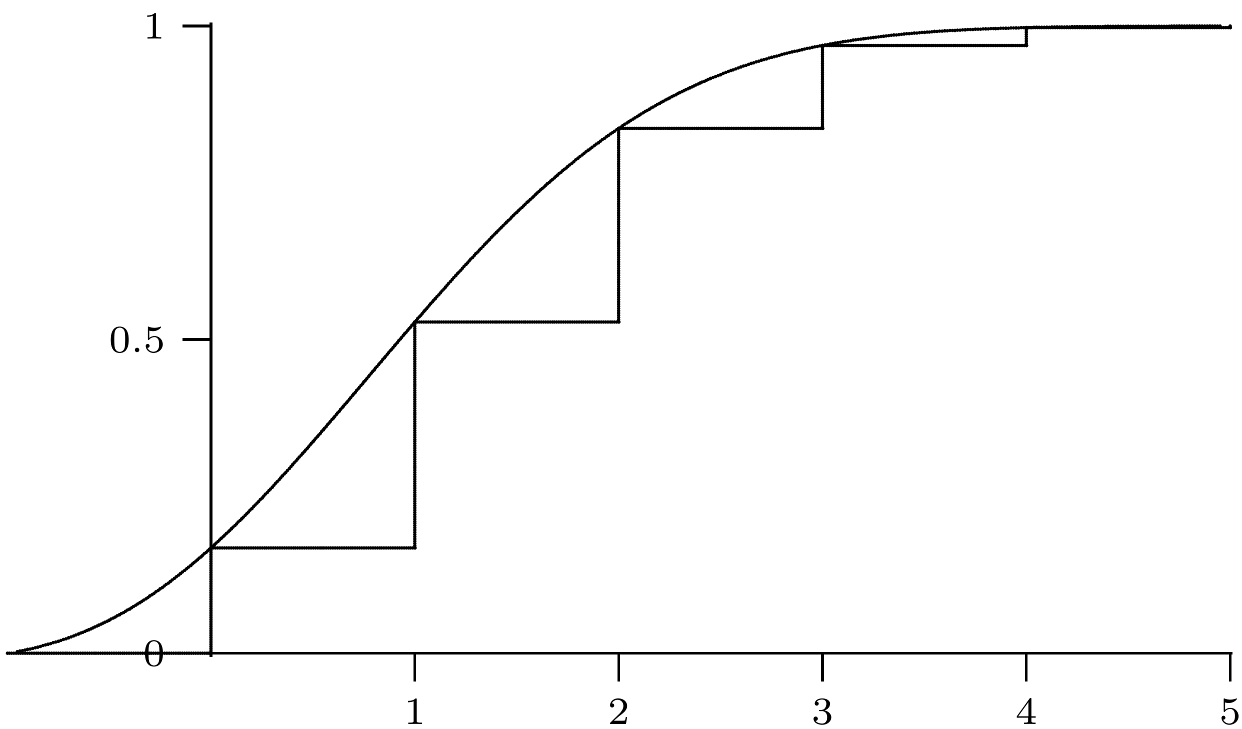
Rachunki dla frakcji (p.ufn. jednostronny):

Rozkład dwumianowy

$$P_\theta\{S_n \leq k\} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \theta^j (1-\theta)^{n-j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

nie jest ciągły, więc go uciąglamy

$$P_\theta\{S_n \leq x\} = B(n-x, x+1; 1-\theta), \quad x \in [-1, n]$$



Dla ustalonej liczby $\gamma \in (0,1)$ definiujemy funkcję $(0,1) \ni \theta \to q_\gamma(\theta) \in [0,n)$:

$$P_\theta\{S_n < q_\gamma(\theta)\} = \gamma \qquad (!!!)$$

Jej odwrotność: $[0,n) \ni x \to q_\gamma^{-1}(x) \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} q_\gamma(\theta) = x \quad &\iff \quad P_\theta\{S_n < x\} = \gamma \\ &\iff \quad B(n-x+1, x; 1-\theta) = \gamma \\ &\iff \quad B(x, n-x+1; \theta) = 1-\gamma \\ &\iff \quad \theta = B^{-1}(x, n-x+1; 1-\gamma) \end{aligned}$$

Więc

$$q_\gamma^{-1}(x) = B^{-1}(x, n-x+1; 1-\gamma)$$

Funkcja $\theta \to q_\gamma(\theta)$ jest rosnąca, więc

$$P_\theta\{S_n < q_\gamma(\theta)\} = P_\theta\{q_\gamma^{-1}(S_n) < \theta\}$$

Zatem, jeżeli $0 < S_n \le n$, to

$$\Big(B^{-1}(S_n, n - S_n + 1; 1 - \gamma), 1\Big)$$

jest przedziałem ufności dla θ na poziomie ufności γ; jeżeli $S_n = 0$, to przedziałem ufności na poziomie ufności $\ge \gamma$ dla każdego $\gamma \in (0,1)$ jest przedział $(0,1)$, bo $\forall\alpha \quad B^{-1}(x, n - x + 1; \alpha) \to 0$, gdy $x \to 0$.

Powtarzając to rozumowanie, raz dla funkcji $q'_\gamma(\theta)$ takiej, że

$$P_\theta\{S_n < q'_\gamma(\theta)\} = \frac{1+\gamma}{2}$$

i drugi raz dla funkcji $q''_\gamma(\theta)$ takiej, że

$$P_\theta\{S_n > q''_\gamma(\theta)\} = \frac{1+\gamma}{2}$$

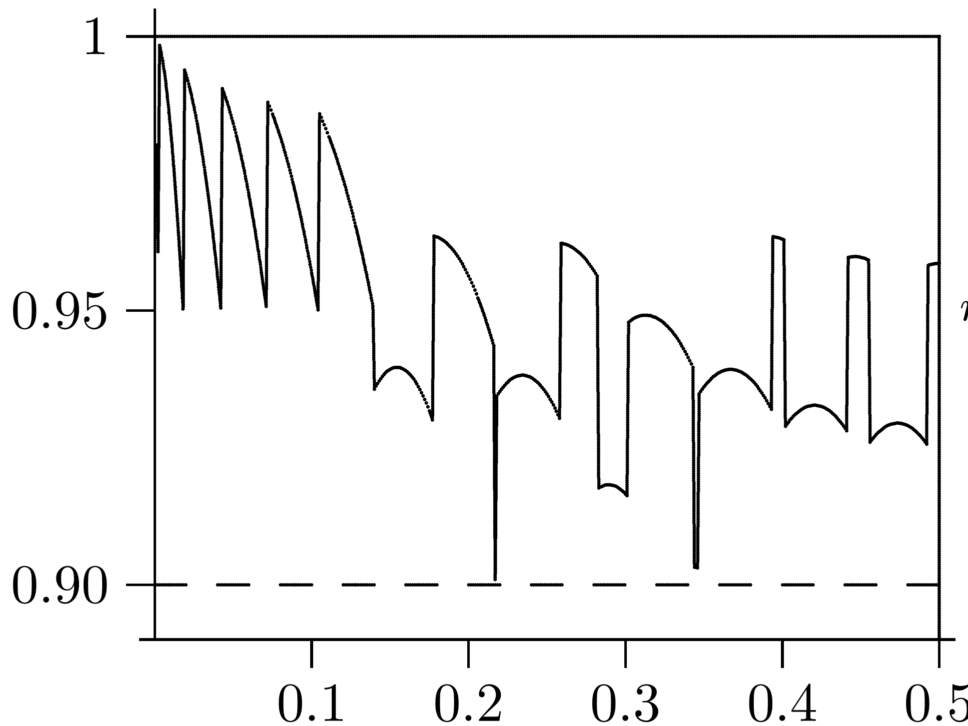
otrzymamy dwustronny przedział ufności dla θ na poziomie ufności γ w postaci

$$\left(B^{-1}\left(S_n, n-S_n+1; \frac{1-\gamma}{2}\right),\ B^{-1}\left(S_n+1, n-S_n; \frac{1+\gamma}{2}\right)\right)$$

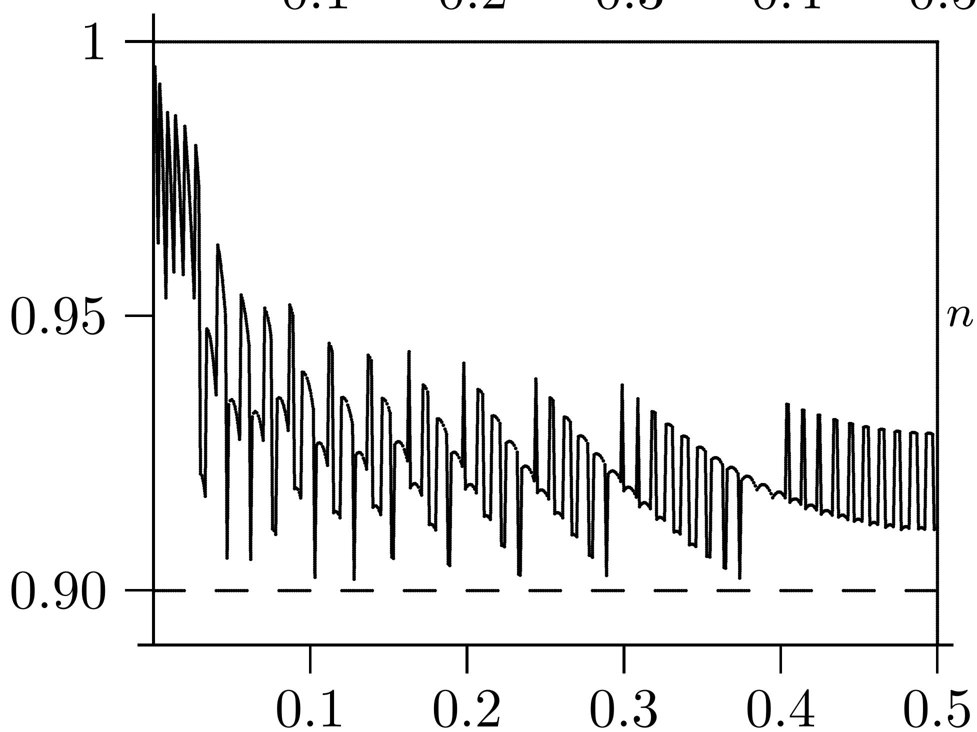
Por. Bartoszewicz (1996), Przykład V.9.3 (s. 301)

Przedział Neymana spełnia wymagania definicji:

$$P_\theta\{\underline{\theta}(S_n) \le \theta \le \overline{\theta}(S_n)\} \ge \gamma \quad \text{dla kadego } \theta \in (0,1)$$



$n = 20, \gamma = 0.9$



$n = 100, \gamma = 0.9$

Komentarze:

1. Przez randomizację można uzyskać dokładnie zadany poziom ufności (szczegóły np. Bartoszewicz)

2. Optymalność p.ufn. (Lehmann, Bartoszewicz)

Przedział Neymana

$$\left(B^{-1}\left(S_n, n-S_n+1; \frac{1-\gamma}{2}\right),\ B^{-1}\left(S_n+1, n-S_n; \frac{1+\gamma}{2}\right)\right)$$

Kłopoty numeryczne dwudziestego wieku:

Clopper i Pearson (1934) - nomogram

Tablice np w Zieliński i Zieliński (1990) - interpolacja

Trudna teoria ?

$\rightarrow$ przedziały asymptotyczne Walda

ASYMPTOTYCZNE PRZEDZIAŁY UFNOŚCI

Unormowana statystyka S_n ma asymptotycznie rozkład normalny: dla każdego $\theta \in (0,1)$ oraz dla każdego $x \in (-\infty, \infty)$

$$P_\theta \left\{ \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)/n}} \le x \right\} \to \Phi(x), \quad n \to \infty$$

$\hat{\theta}_n = S_n/n$

$\Phi(x)$ – wartość dystrybuanty rozkładu normalnego $N(0,1)$ w punkcie x

Interpretacja: dla "dużych" n zmienna losowa $(\hat{\theta}_n - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)/n}$ ma "w przybliżeniu" rozkład normalny $N(0,1)$

"dużych" - ???

"w przybliżeniu" - ???

DWIE SZKOŁY

PIERWSZA (Cramér 1957 s. 492, Fisz 1967 s. 512, Niemiro 1999 s. 155, Trybuła 2001 s. 184, Krzyśko 2004 s. 162):

$(\hat{\theta}_n - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)/n}$ ma asymptotyczny rozkład normalny $N(0,1)$ więc dla "dużych n" i dla każdego $\theta \in (0,1)$, mamy "w przybliżeniu",

$$P_\theta\left\{\hat{\theta}_n - z_\gamma\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}} \le \theta \le \hat{\theta}_n + z_\gamma\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\right\} = \gamma$$

$$z_\gamma = \Phi^{-1}(1+\gamma)/2$$

Przedział ufności:

$$\left(\frac{n}{n+z_\gamma^2}\left[\ \hat{\theta}_n + \frac{z_\gamma^2}{2n} - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n} + \left(\frac{z_\gamma}{2n}\right)^2}\ \right],\right.$$

$$\left.\frac{n}{n+z_\gamma^2}\left[\ \hat{\theta}_n + \frac{z_\gamma^2}{2n} + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n} + \left(\frac{z_\gamma}{2n}\right)^2}\ \right]\right)$$

DWIE SZKOŁY (c.d.)

DRUGA (Gajek 1996 s. 85, Grzegorzewski 2003 s. 113, Kala 2002 s. 58, Koronacki 2004 s. 211, Krzyśko 2004 s. 163):

$(\hat{\theta}_n - \theta)/\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)/n}$ ma asymptotyczny rozkład normalny $N(0,1)$ i wtedy, dla każdego $\theta \in (0,1)$, mamy "w przybliżeniu"

$$P_\theta\left\{\hat{\theta}_n - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}} \le \theta \le \hat{\theta}_n + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right\} = \gamma$$

Przedział ufności:

$$\left(\hat{\theta}_n - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}},\ \hat{\theta}_n + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right)$$

"Przybliżone przedziały ufności"

WERSJA $(\hat{\theta}_n - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)/n} \sim N(0,1)$

Fisz (1967, s. 512) "*ograniczymy się do dużych prób*"

Niemiro: "*W praktyce, jeśli n jest "odpowiednio duże", oczekujemy, że nierówność $P_\theta\{\underline{\theta}(S_n) \leq \theta \leq \overline{\theta}(S_n)\} \geq \gamma$ dla każdego $\theta \in (0,1)$ jest w przybliżeniu spełniona*"

Trybuła (2001, s. 184) "n musi być dostatecznie wielkie ($n \geq 50$)"

Krzyśko (2004, s. 162) "*przybliżony przedział ufności*"

WERSJA $(\hat{\theta}_n - \theta)/\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)/n} \sim N(0,1)$

Gajek (1996, s.85), Grzegorzewski (2003, s. 113): "$n \geq 100$"

Kala (2002, s. 58), Krzyśko (2004, s. 163): "przedział przybliżony"

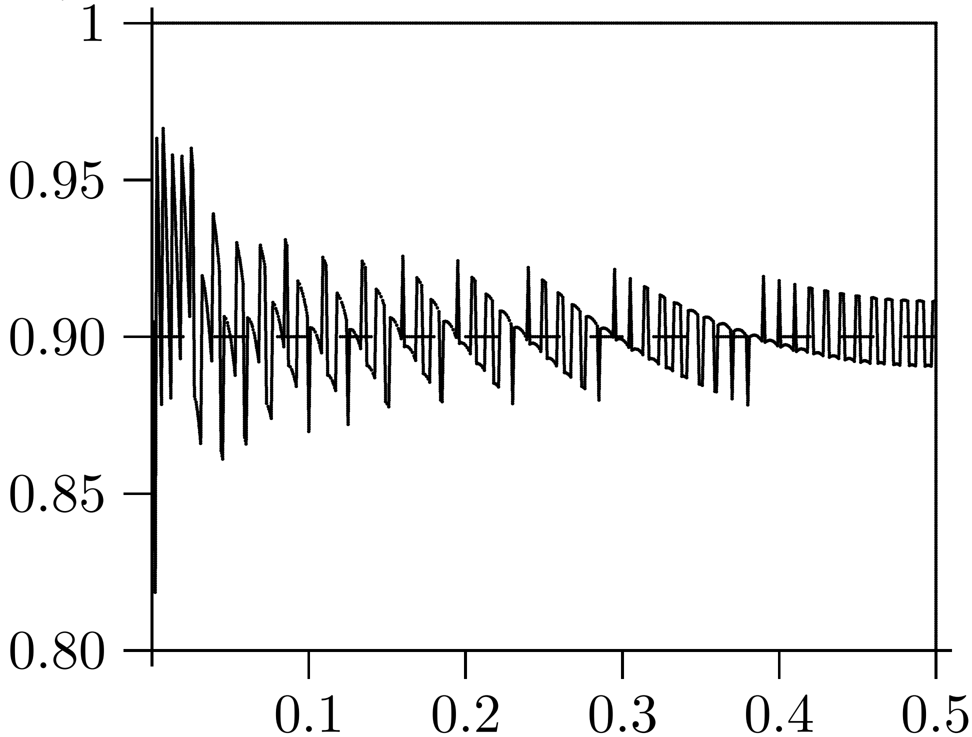
Koronacki (2004, s. 211)

$$P\left(\hat{\theta}_n - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right) \approx \gamma$$

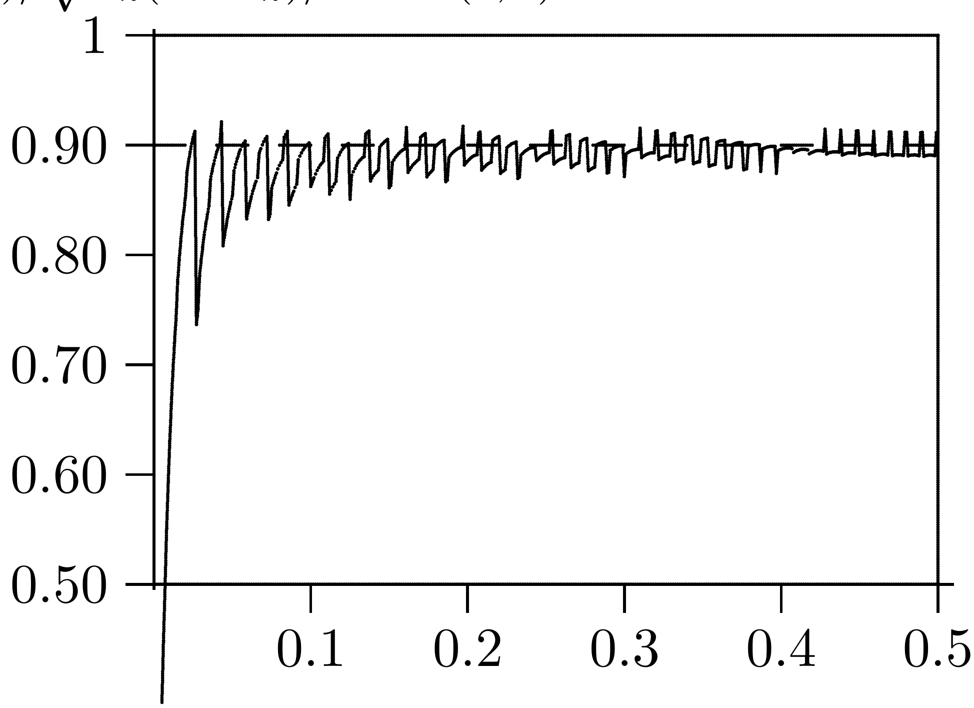
bez sprecyzowania, co oznacza podwójny wężyk $\approx$.

Prawdopodobieństwo pokrycia dla $\gamma = 0.9, n = 100$

$(\hat{\theta}_n - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)/n} \sim N(0,1)$



$(\hat{\theta}_n - \theta)/\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)/n} \sim N(0,1)$



Dla przedziałów

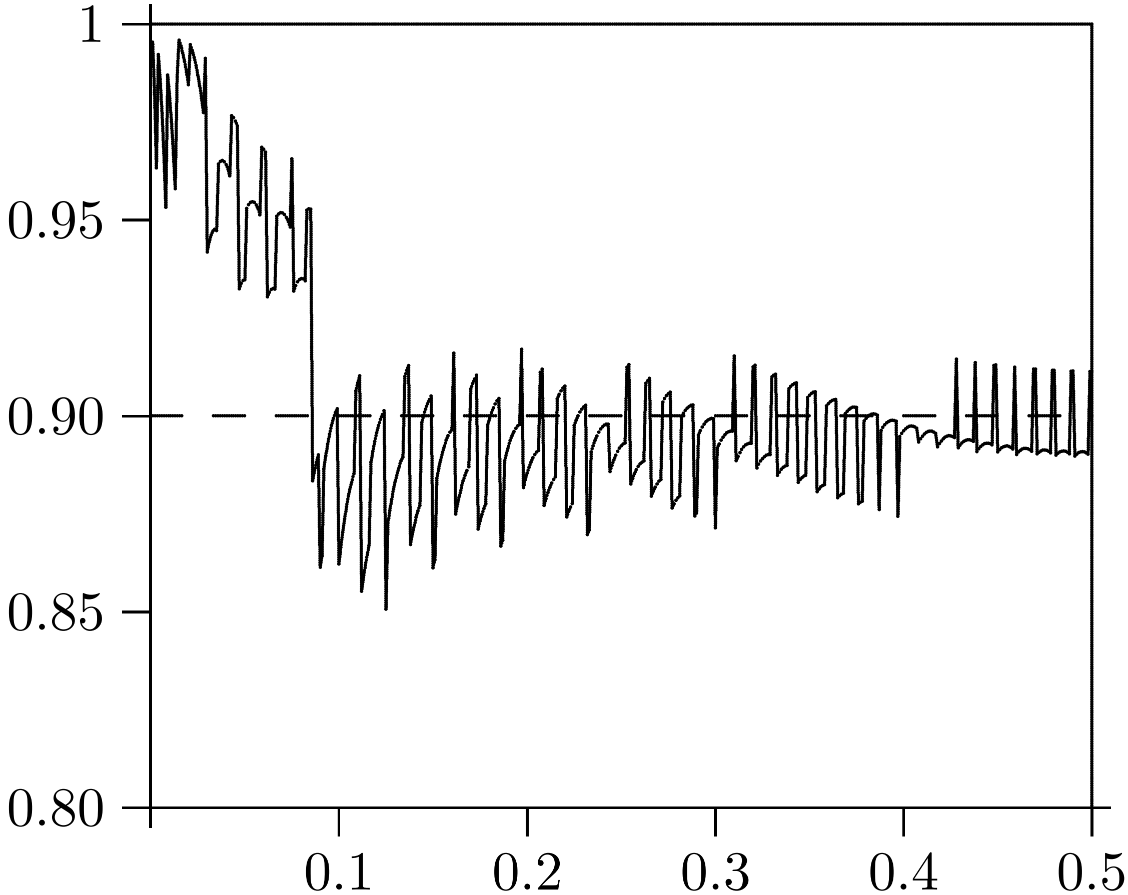
$$\left(\hat{\theta}_n - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}},\ \hat{\theta}_n + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right)$$

prawdopodobieństwo pokrycia maleje do zera, gdy $\theta \to 0$ oraz gdy $\theta \to 1$.

Zalecenie: stosować, gdy $n\theta \geq 5$ oraz $n(1-\theta) \geq 5$ (Inny problem statystyczny!)

Oryginalna propozycja:

Koronacki (2004, s. 149): stosować ten przedział wtedy, gdy $n\hat{\theta}_n \geq 5$ oraz $n(1-\hat{\theta}_n) \geq 5$; w pozostałych przypadkach stosować przedział Neymana



Koronacki-Mielniczuk ($n = 100,\ \gamma = 0.9$)

TO TEŻ NIE JEST PRZEDZIAŁ UFNOŚCI!

$n = 100, \gamma = 0.95$

	Dokładne	Asympt 1	Asympt2
5	(0.0164,0.1128)	(0.0073,0.0927)	(0.0245,0.0992)
10	(0.0491,0.1762)	(0.0412,0.1588)	(0.0607,0.1604)
15	(0.0865,0.2353)	(0.0800,0.2200)	(0.1005,0.2179)
20	(0.1267,0.2918)	(0.1216,0.2784)	(0.1425,0.2733)
30	(0.2124,0.3998)	(0.2102,0.3898)	(0.2307,0.3798)
40	(0.3033,0.5028)	(0.3040,0.4960)	(0.3231,0.4822)
50	(0.3983,0.6017)	(0.4020,0.5980)	(0.4188,0.5812)

Baran (2007):

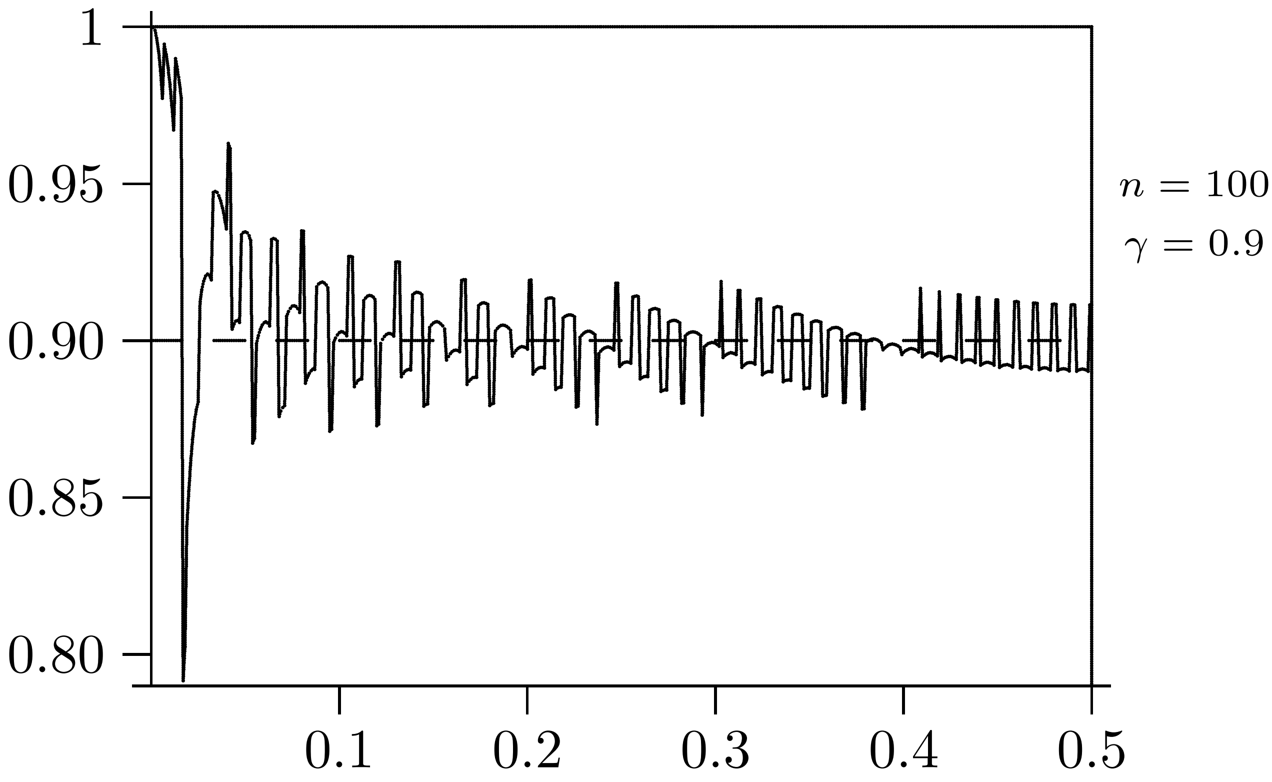
$$\left(\tilde{\theta} - z_\gamma \sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})}{n+b(S_n)}}, \quad \tilde{\theta} + z_\gamma \sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})}{n+b(S_n)}}\right),$$

gdzie

$$\tilde{\theta} = \frac{S_n + a(S_n)}{n + b(S_n)}$$

oraz

$$(a,b)(S_n) = \begin{cases} (1/2, 5/4), & \text{gdy } S_n = 0, \\ (1, 7/4), & \text{gdy } S_n = 1, \\ (3/4, 7/4), & \text{gdy } S_n = n-1, \\ (3/4, 5/4), & \text{gdy } S_n = n, \\ (3/4, 3/2), & \text{poza tym.} \end{cases}$$



Podwójny wężyk $\approx$ pojawia się w kontekście

$$P\left(\hat{\theta}_n - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}} \le \theta \le \hat{\theta}_n + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right) \approx \gamma$$

Koronacki (2004. s. 211), Niemiro (1999, s.155)

Może raczej tak:

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_n - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}} \le \theta \le \hat{\theta}_n + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right) = \gamma \pm \text{coś}$$

lub, jeżeli zbyt duży poziom ufności nam nie przeszkadza,

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_n - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}} \le \theta \le \hat{\theta}_n + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}{n}}\right) = \gamma - \text{coś}$$

gdzie "coś" = ...

ALE PO CO WTEDY TEN WĘŻYK?

DUALIZM testy - przedziały ufności

"Przedział ufności
na poziomie ufności w przybliżeniu równym ... "

"Test
na poziomie istotności w przybliżeniu równym ... "

???

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI NEYMANA

Teza: Techniczne przeszkody numeryczne w stosowaniu tego przedziału, które jeszcze przed pół wiekiem stymulowały poszukiwanie prostszych rozwiązań, są już dawno pokonane i dzisiaj każdy inżynier, biolog, ekonomista i in., który potrafi stosować test Studenta i test chi-kwadrat, z pewnością sobie poradzi z poprawną estymacją przedziałową frakcji

Kilka prostych sposobów.

Podane niżej wzory są aktualne dla $1 \leq S_n \leq n-1$. Jeżeli $S_n = 0$, to dolna granica przedziału ufności jest równa 0, a jeżeli $S_n = n$ to górna granica jest równa 1; pozostałą granicę obliczamy według podanych niżej reguł.

EXCEL

Wpisać

n do komórki A1

S_n do komórki A2

γ do komórki A3

i obliczyć dolną i górną granicę:

ROZKŁAD.BETA.ODW$((1-A3)/2; A2; A1-A2+1)$

ROZKŁAD.BETA.ODW$((1+A3)/2; A2+1; A1-A2)$

Pakiet STATISTICA

Funkcje

$$VBeta((1-\gamma)/2, S_n, n-S_n+1)$$

$$VBeta((1+\gamma)/2, S_n+1, n-S_n)$$

Pakiet MATHEMATICA

Funkcje

Quantile[BetaDistribution[$\mathrm{S_n}, \mathrm{n} - \mathrm{S_n} + 1,\ (1-\gamma)/2$]

Quantile[BetaDistribution[$\mathrm{S_n} + 1, \mathrm{n} - \mathrm{S_n},\ (1+\gamma)/2$]

$$B^{-1}(\alpha, \beta; t) = \frac{\alpha F(2\alpha, 2\beta, t)}{\beta + \alpha F(2\alpha, 2\beta, t)}$$

$F(2\alpha, 2\beta, t)$ – kwantyl rzędu t rozkładu F z $(2\alpha, 2\beta)$ stopniami swobody.

Zieliński/Zieliński (1990):

dolna granica dwustronnego p.ufn. na poziomie ufn $1 - \alpha$:

$$\frac{S_n}{S_n + (n - S_n + 1)F\left(2(n - S_n + 1), 2S_n, \frac{\alpha}{2}\right)}$$

oraz górna

$$\frac{(S_n + 1)F\left(2(S_n + 1), 2(n - S_n), \frac{\alpha}{2}\right)}{n - S_n + (S_n + 1)F\left(2(S_n + 1), 2(n - S_n), \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Jak widać, żadne kombinowanie z "przybliżonymi" i "asymtotycznymi" wzorami, które w dodatku nie dają poprawnych przedziałów ufności, nie jest potrzebne.

"Bye-bye, so long, farewell" to the Wald interval (Casella 2001).

Prace cytowane.

J.Baran (2007): Nowy przedział ufności dla prawdopodobieństwa sukcesu rozkładu dwumianowego. XXXIII Konferencja ”Statystyka Matematyczna Wisła 2007”, 3-7 grudnia 2007

J.Bartoszewicz (1996): Wykłady ze statystyki matematycznej. PWN.

C.R.Blyth i H.A.Still (1983): Binomial Confidence Intervals. JASA 78, 381, pp, 108-116

L.D.Brown, T.T.Cai and A.DasGupta (2001): Interval Estimation for a Binomial Proportion. Statistical Science 16, 2, 101-133

G.Casella (1986): Refining binomial confidence intervals. The Canadian Journal of Statistics 14, 2, pp. 113-129

G.Casella (2001): Statistical Science 16, 2, p. 120

C.J.Clopper i E.S.Pearson (1934): The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial. Biometrika, Vol. 26, No. 4, pp. 404-413

H.Cramér (1958): Metody matematyczne w statystyce. PWN.

M.Fisz (1967): Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN.

L.Gajek i M.Kałuszka (1996): Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody. WNT.

P.Grzegorzewski, K.Bobecka, A.Dembińska, J.Pusz (2003): Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Wydanie czwarte, poprawione. Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Warszawa

R.Kala (2002): Statystyka dla przyrodników. Wydawnictwo Akademii Rolniczej im. Augusta Cieszkowskiego w Poznaniu.

W.Klonecki (1999): Statystyka dla inżynierów, PWN

J.Koronacki i J.Mielniczuk (2004): Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. Wydanie drugie. WNT

M.Krzyśko (2004): Statystyka matematyczna. Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

E.L.Lehmann (1968): Testowanie hipotez statystycznych. PWN.

R.Magiera (2007): Modele i metody statystyki matematycznej. Wydanie drugie rozszerzone. Część II, Wnioskowanie statystyczne. Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., Wrocław

J.Neyman (1934): On the Two Different Aspects of the Representative Method: The Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selecion. Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 97, No. 4, pp. 558-625.

W.Niemiro (1999): Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Szkoła Nauk Ścisłych.

A.Plucińska i E.Pluciński (2000): Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne. WNT

S.D.Silvey (1978): Wnioskowanie statystyczne. PWN.

S.Trybuła (2001): Statystyka matematyczna z elementami teorii decyzji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.

R.Zieliński i W.Zieliński (1990): Tablice statystyczne. PWN.

S.Zubrzycki (1966): Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN.