Zadanie 1. $X_{(1)}, \ldots, X_{(400)}$ jest próbą z pewnego rozkładu ciągłego o wariancji σ^2, ustawioną w porządku niemalejącym, tzn. $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(400)}$. Niech m będzie medianą rozważanego rozkładu. Na podstawie CTG wyznaczyć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa $P(X_{(220)} \leq m)$.
Odp. 0.0256

Zadanie 2. Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_{735}$ oraz $Y_1, \ldots, Y_{880}$ są niezależne o rozkładach:

$$P(X = 0) = \frac{3}{7} = 1 - P(X = 1), \quad P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

Korzystając z CTG obliczyć $P\left(\sum_{i=1}^{735} X_i < \sum_{i=1}^{880} Y_i\right)$.
Odp. 0.84

Zadanie 3. W urnie I znajdują się dwie kule i w urnie II znajdują się dwie kule. Na te cztery kule w sumie składają się dwie kule białe i dwie czarne. Przeprowadzamy następujące doświadczenie losowe.
a) najpierw losujemy jedną kulę z urny I i przekładamy ją do urny II,
b) następnie losujemy jedną kulę z urny II i przekładamy ją do urny I.
Sekwencję losowań a) i b) powtarzamy wielokrotnie. Przed każdym losowaniem dokładnie mieszamy kule w urnie. Niech $p_n(1)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że po n powtórzeniach (czyli po $2n$ losowaniach) w urnie I znajduje się jedna biała i jedna czarna kula. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} p_n(1)$.
Odp. 2/3

Zadanie 4. Na początku doświadczenia w urnie I znajdują się trzy kule białe, zaś w urnie II trzy kule czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny, po czym wylosowaną kule z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność te powtarzamy wielokrotnie. Obliczyć granicę (przy $n \to \infty$) prawdopodobieństwa, iż obie kule wylosowane w n-tym kroku są jednakowego koloru.
Odp. 0.4

Zadanie 5. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne i mają identyczny rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$. Niech $\Pi_n = X_1 \cdots X_n$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} P(\Pi_n \leq 0.5)$.
Odp. 1

Zadanie 6. Urządzenie zawiera dwa podzespoły A i B. Obserwujemy działanie urządzenia w chwilach $t = 0, 1, 2, \ldots$ Każdy z podzespołów w ciągu jednostki czasu może ulec awarii z prawdopodobieństwem $1 - p$, niezależnie od drugiego. Jeśli w chwili t oba podzespoły są niesprawne, następuje naprawa i w chwili $t + 1$ oba są już sprawne. Jeśli w chwili t tylko jeden podzespół jest niesprawny, to nie jest naprawiany. W chwili 0 oba zespoły są sprawne. Obliczyć granicę prawdopodobieństwa, iż podzespół A jest sprawny w chwili t, przy $t \to \infty$.
Odp. $\frac{1+p}{2+2p-p^2}$

Zadanie 7. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne i mają identyczny rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$. Niech $Y_n = X_1 \cdots X_n$. Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq (2/e)^n) = 0.5$.
Odp. —

Zadanie 8. Załóżmy, że $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$P(Y_n = 0) = P(Y_n = 1) = \cdots = P(Y_n = 9) = \frac{1}{10}.$$

Niech $X_0 = 0$ oraz niech dla $n = 1, 2, \ldots$

$$X_n = \begin{cases} \max\{X_{n-1}, Y_n\}, & \text{gdy } Y_n > 0, \\ 0, & \text{gdy } Y_n = 0. \end{cases}$$

Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq 3)$.
Odp. 7/8

Zadanie 9. Niech W_1 i W_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości $f_\lambda(w) = \lambda e^{-\lambda w}$, dla $w > 0$. Obliczyć granicę prawdopodobieństwa warunkowego:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\min\{W_1, W_2\} > \frac{t}{2}|W_1 + W_2 > t\right).$$

Odp. 0

Zadanie 10. Rozważmy ciąg $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Niech

$$S_n = X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n + X_nX_{n+1}.$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
(A) nie istnieje ciąg liczb c_n taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{c_n} \le a\right) = \Phi(a)$ dla każdego a.
(B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le a\right) = \Phi(a)$ dla każdego a.
(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \le a\right) = \Phi(a)$ dla każdego a.
(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \le a\right) = \Phi(a)$ dla każdego a.
(E) $P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le a\right) = \Phi(a)$ dla każdego a i dla każdego n.
Odp. B

Zadanie 11. Zmienne losowe $I_1, \ldots, I_n, \ldots$ i $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne. Każda ze zmiennych I_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa: $P(I_i = 1) = p = 1 - P(I_i = 0)$. Każda ze zmiennych X_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że $EX_i = \mu$ i $VarX_i = \sigma^2$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n I_iX_i$ oraz $K_n = \sum_{i=1}^n I_i$. Zbadać zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych $\frac{S_n - K_n\mu}{\sqrt{n}}$ przy $n \to \infty$.
Odp. rozkład graniczny $N(0, p\sigma^2)$

Zadanie 12. Załóżmy, że $W_1, \ldots, W_n, \ldots$ jest ciągiem zmiennych losowych takim, że zmienna W_1 ma gęstość wykładniczą $f(w_1) = \lambda \exp(-\lambda w_1)$ dla $w_1 > 0$; warunkowo, dla danych $W_1, \ldots, W_n$ zmienna W_{n+1} ma gęstość wykładniczą (dla $w_{n+1} > 0$)

$$f(w_{n+1}|w_1, \ldots, w_n) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda w_{n+1}), & \text{gdy } w_n \le c, \\ \mu \exp(-\mu w_{n+1}), & \text{gdy } w_n > c. \end{cases}$$

Niech $c = \ln 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} EW_n$.
Odp. $4/5$

Zadanie 13. Niech $\chi^2_{0.1}(n)$ oznacza kwantyl rzędu 0.1 rozkładu chi-kwadrat z n stopniami swobody (liczbę, od której zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat jest mniejsza z prawdopodobieństwem 0.1). Obliczyć (z dokładnością do 0.01)

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi^2_{0.1}(n) - n}{\sqrt{n}}.$$

Odp. -1.81

Zadanie 14. Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$, stanowiącym łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Niech $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$, niezależnych od siebie nawzajem i od zmiennych $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa $P(Z_i = 1) = 0.9 = 1 - P(Z_i = 0)$. Obserwujemy zmienne $Y_i = Z_iX_i$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n > Y_{n+1})$.
Odp. 0.126

Zadanie 15. Załóżmy, że $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Rozważmy ciąg średnich geometrycznych $\sqrt[n]{U_1 \cdots U_n}$. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\sqrt[n]{U_1 \cdots U_n} \leq \frac{1}{3}\right) = 0$.
Odp. —

Zadanie 16. Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku w łańcuchu Markowa o dwóch stanach $\{1, 2\}$ jest postaci

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Niech X_n oznacza stan łańcucha w momencie n. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n X_{n+1})$.
Odp. 5/2

Zadanie 17. Obserwujemy działanie pewnego urządzenia w kolejnych chwilach $t = 0, 1, 2, \ldots$ Działanie tego urządzenia zależy od pracy dwóch podzespołów A i B. Każdy z nich może ulec awarii w jednostce czasu z prawdopodobieństwem 0.1 niezależnie od drugiego. Jeżeli jeden z podzespołów ulega awarii, to urządzenie nie jest naprawiane i działa dalej wykorzystując drugi podzespół. Jeżeli oba podzespoły są niesprawne w chwili t, to następuje ich naprawa i w chwili $t + 1$ oba są sprawne. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że podzespół B jest sprawny w chwili t, przy t dążącym do nieskończoności (z dokładnością do 0.001).
Odp. 0.635

Zadanie 18. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dla } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{dla } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Niech $T_n = \prod_{i=1}^n X_i^{\frac{1}{n}}$. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|T_n - e^{-0.5}|\sqrt{n} > e^{-0.5}\} = 0.046$.
Odp. —

Zadanie 19. Zmienne losowe $Z_1, \ldots, Z_n$ i $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ są niezależne. Każda ze zmiennych losowych Z_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa $P(Z_i = 1) = p = 1 - P(Z_i = 0)$. Każda ze zmiennych losowych (X_i, Y_i) ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że $EX_i = EY_i = m$, $VarX_i = VarY_i = \sigma^2$ i współczynnik korelacji $Corr(X_i, Y_i) = \varrho$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i X_i$ i $T_n = \sum_{i=1}^n Z_i Y_i$. Zbadać zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych

$$\frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}} \qquad \text{przy} \qquad n \to +\infty.$$

Odp. Rozkład graniczny $N(0, 2p\sigma^2(1 - \varrho))$

Zadanie 20. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_0 = 3$ oraz niech dla $n = 1, 2, \ldots$ zachodzi

$$Y_n = \begin{cases} 3, & \text{gdy } X_n = 3, \\ \min\{Y_{n-1}, X_n\}, & \text{gdy } X_n < 3. \end{cases}$$

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n \leq 1)$.
Odp. 1/3

Zadanie 21. Załóżmy, że $W_1, \ldots, W_n, \ldots$ jest ciągiem zmiennych takim, że zmienna losowa W_1 ma rozkład Pareto o gęstości $f(w_1) = \frac{4}{(1+w_1)^5}$ dla $w_1 > 0$, natomiast W_{n+1} ma rozkład, przy danych $w_1, \ldots, w_n$ o funkcji gęstości

$$f(w_{n+1}|w_1, \ldots, w_n) = \begin{cases} \frac{4}{(1+w_{n+1})^5}, & \text{gdy } w_n \leq 1, \\ \frac{3}{(1+w_{n+1})^4}, & \text{gdy } w_n > 1. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\lim\limits_{n\to\infty} E(W_n)$.

Odp. $\frac{31}{90}$