

**Zadanie 1.**  $X_{(1)}, \dots, X_{(400)}$  jest próbą z pewnego rozkładu ciągłego o wariancji  $\sigma^2$ , ustawioną w porządku niemalejącym, tzn.  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(400)}$ . Niech  $m$  będzie medianą rozważanego rozkładu. Na podstawie CTG wyznaczyć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa  $P(X_{(220)} \leq m)$ .

**Odp.** 0.0256

**Zadanie 2.** Załóżmy, że  $X_1, \dots, X_{735}$  oraz  $Y_1, \dots, Y_{880}$  są niezależne o rozkładach:

$$P(X = 0) = \frac{3}{7} = 1 - P(X = 1), \quad P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

Korzystając z CTG obliczyć  $P\left(\sum_{i=1}^{735} X_i < \sum_{i=1}^{880} Y_i\right)$ .

**Odp.** 0.84

**Zadanie 3.** W urnie *I* znajdują się dwie kule i w urnie *II* znajdują się dwie kule. Na te cztery kule w sumie składają się dwie kule białe i dwie czarne. Przeprowadzamy następujące doświadczenie losowe.

a) najpierw losujemy jedną kulę z urny *I* i przekładamy ją do urny *II*,

b) następnie losujemy jedną kulę z urny *II* i przekładamy ją do urny *I*.

Sekwencję losowań a) i b) powtarzamy wielokrotnie. Przed każdym losowaniem dokładnie mieszamy kule w urnie. Niech  $p_n(1)$  oznacza prawdopodobieństwo tego, że po  $n$  powtórzeniach (czyli po  $2n$  losowaniach) w urnie *I* znajduje się jedna biała i jedna czarna kula. Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(1)$ .

**Odp.** 2/3

**Zadanie 4.** Na początku doświadczenia w urnie *I* znajdują się trzy kule białe, zaś w urnie *II* trzy kule czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny, po czym wylosowaną kulę z urny *I* wrzucamy do urny *II*, a tę wylosowaną z urny *II* wrzucamy do urny *I*. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Obliczyć granicę (przy  $n \rightarrow \infty$ ) prawdopodobieństwa, iż obie kule wylosowane w  $n$ -tym kroku są jednakowego koloru.

**Odp.** 0.4

**Zadanie 5.** Zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n, \dots$  są niezależne i mają identyczny rozkład jednostajny na odcinku  $[0, 2]$ . Niech  $\Pi_n = X_1 \cdots X_n$ . Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Pi_n \leq 0.5)$ .

**Odp.** 1

**Zadanie 6.** Urządzenie zawiera dwa podzespoły *A* i *B*. Obserwujemy działanie urządzenia w chwilach  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Każdy z podzespołów w ciągu jednostki czasu może ulec awarii z prawdopodobieństwem  $1 - p$ , niezależnie od drugiego. Jeśli w chwili  $t$  oba podzespoły są niesprawne, następuje naprawa i w chwili  $t + 1$  oba są już sprawne. Jeśli w chwili  $t$  tylko jeden podzespół jest niesprawny, to nie jest naprawiany. W chwili 0 oba zespoły są sprawne. Obliczyć granicę prawdopodobieństwa, iż podzespół *A* jest sprawny w chwili  $t$ , przy  $t \rightarrow \infty$ .

**Odp.**  $\frac{1+p}{2+2p-p^2}$

**Zadanie 7.** Zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n, \dots$  są niezależne i mają identyczny rozkład jednostajny na odcinku  $[0, 2]$ . Niech  $Y_n = X_1 \cdots X_n$ . Udowodnić, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq (2/e)^n) = 0.5$ .

**Odp.** —

**Zadanie 8.** Załóżmy, że  $Y_1, \dots, Y_n, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$P(Y_n = 0) = P(Y_n = 1) = \dots = P(Y_n = 9) = \frac{1}{10}.$$

Niech  $X_0 = 0$  oraz niech dla  $n = 1, 2, \dots$

$$X_n = \begin{cases} \max\{X_{n-1}, Y_n\}, & \text{gdym } Y_n > 0, \\ 0, & \text{gdym } Y_n = 0. \end{cases}$$

Obliczyć granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq 3)$ .

**Odp.** 7/8

**Zadanie 9.** Niech  $W_1$  i  $W_2$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości  $f_\lambda(w) = \lambda e^{-\lambda w}$ , dla  $w > 0$ . Obliczyć granicę prawdopodobieństwa warunkowego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\min\{W_1, W_2\} > \frac{t}{2} \mid W_1 + W_2 > t\right).$$

**Odp.** 0

**Zadanie 10.** Rozważmy ciąg  $X_1, \dots, X_n, \dots$  niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie normalnym  $N(0, 1)$ . Niech

$$S_n = X_1 X_2 + X_2 X_3 + \dots + X_{n-1} X_n + X_n X_{n+1}.$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

(A) nie istnieje ciąg liczb  $c_n$  taki, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n}{c_n} \leq a\right) = \Phi(a)$  dla każdego  $a$ .

(B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq a\right) = \Phi(a)$  dla każdego  $a$ .

(C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = \Phi(a)$  dla każdego  $a$ .

(D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leq a\right) = \Phi(a)$  dla każdego  $a$ .

(E)  $P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq a\right) = \Phi(a)$  dla każdego  $a$  i dla każdego  $n$ .

**Odp.** B

**Zadanie 11.** Zmienne losowe  $I_1, \dots, I_n, \dots$  i  $X_1, \dots, X_n, \dots$  są niezależne. Każda ze zmiennych  $I_i$  ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa:  $P(I_i = 1) = p = 1 - P(I_i = 0)$ . Każda ze zmiennych  $X_i$  ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że  $EX_i = \mu$  i  $Var X_i = \sigma^2$ . Niech  $S_n = \sum_{i=1}^n I_i X_i$  oraz  $K_n = \sum_{i=1}^n I_i$ . Z badać zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych  $\frac{S_n - K_n \mu}{\sqrt{n}}$  przy  $n \rightarrow \infty$ .

**Odp.** rozkład graniczny  $N(0, p\sigma^2)$

**Zadanie 12.** Załóżmy, że  $W_1, \dots, W_n, \dots$  jest ciągiem zmiennych losowych takim, że zmienna  $W_1$  ma gęstość wykładniczą  $f(w_1) = \lambda \exp(-\lambda w_1)$  dla  $w_1 > 0$ ; warunkowo, dla danych  $W_1, \dots, W_n$  zmienna  $W_{n+1}$  ma gęstość wykładniczą (dla  $w_{n+1} > 0$ )

$$f(w_{n+1} | w_1, \dots, w_n) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda w_{n+1}), & \text{gdy } w_n \leq c, \\ \mu \exp(-\mu w_{n+1}), & \text{gdy } w_n > c. \end{cases}$$

Niech  $c = \ln 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ . Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} EW_n$ .

**Odp.** 4/5

**Zadanie 13.** Niech  $\chi_{0.1}^2(n)$  oznacza kwantyl rzędu 0.1 rozkładu chi-kwadrat z  $n$  stopniami swobody (liczbę, od której zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat jest mniejsza z prawdopodobieństwem 0.1). Obliczyć (z dokładnością do 0.01)

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi_{0.1}^2(n) - n}{\sqrt{n}}.$$

**Odp.** -1.81

**Zadanie 14.** Niech  $X_1, \dots, X_n, \dots$  będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze  $\{0, 1\}$ , stanowiącym łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Niech  $Z_1, \dots, Z_n, \dots$  będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w zbiorze  $\{0, 1\}$ , niezależnych od siebie nawzajem i od zmiennych  $X_1, \dots, X_n, \dots$  o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa  $P(Z_i = 1) = 0.9 = 1 - P(Z_i = 0)$ . Obserwujemy zmienne  $Y_i = Z_i X_i$ . Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > Y_{n+1})$ .

**Odp.** 0.126

**Zadanie 15.** Załóżmy, że  $U_1, \dots, U_n, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, 1]$ . Rozważmy ciąg średnich geometrycznych  $\sqrt[n]{U_1 \cdots U_n}$ . Udowodnić, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt[n]{U_1 \cdots U_n} \leq \frac{1}{3}) = 0$ .

**Odp.** —

**Zadanie 16.** Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku w łańcuchu Markowa o dwóch stanach  $\{1, 2\}$  jest postaci

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Niech  $X_n$  oznacza stan łańcucha w momencie  $n$ . Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n X_{n+1})$ .

**Odp.** 5/2

**Zadanie 17.** Obserwujemy działanie pewnego urządzenia w kolejnych chwilach  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Działanie tego urządzenia zależy od pracy dwóch podzespołów  $A$  i  $B$ . Każdy z nich może ulec awarii w jednostce czasu z prawdopodobieństwem 0.1 niezależnie od drugiego. Jeżeli jeden z podzespołów ulega awarii, to urządzenie nie jest naprawiane i działa dalej wykorzystując drugi podzespół. Jeżeli oba podzespoły są niesprawne w chwili  $t$ , to następuje ich naprawa i w chwili  $t + 1$  oba są sprawne. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że podzespół  $B$  jest sprawny w chwili  $t$ , przy  $t$  dążącym do nieskończoności (z dokładnością do 0.001).

**Odp.** 0.635

**Zadanie 18.** Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dla } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{dla } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Niech  $T_n = \prod_{i=1}^n X_i^{\frac{1}{n}}$ . Udowodnić, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|T_n - e^{-0.5}| \sqrt{n} > e^{-0.5}\} = 0.046$ .

**Odp.** —

**Zadanie 19.** Zmienne losowe  $Z_1, \dots, Z_n$  i  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  są niezależne. Każda ze zmiennych losowych  $Z_i$  ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa  $P(Z_i = 1) = p = 1 - P(Z_i = 0)$ . Każda ze zmiennych losowych  $(X_i, Y_i)$  ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że  $EX_i = EY_i = m$ ,  $Var X_i = Var Y_i = \sigma^2$  i współczynnik korelacji  $Corr(X_i, Y_i) = \rho$ . Niech  $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i X_i$  i  $T_n = \sum_{i=1}^n Z_i Y_i$ . Zbadać zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych

$$\frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}} \quad \text{przy} \quad n \rightarrow +\infty.$$

**Odp.** Rozkład graniczny  $N(0, 2p\sigma^2(1 - \rho))$

**Zadanie 20.** Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  są niezależne o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = \frac{1}{4}.$$

Niech  $Y_0 = 3$  oraz niech dla  $n = 1, 2, \dots$  zachodzi

$$Y_n = \begin{cases} 3, & \text{gdy } X_n = 3, \\ \min\{Y_{n-1}, X_n\}, & \text{gdy } X_n < 3. \end{cases}$$

Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq 1)$ .

**Odp.** 1/3

**Zadanie 21.** Załóżmy, że  $W_1, \dots, W_n, \dots$  jest ciągiem zmiennych takim, że zmienna losowa  $W_1$  ma rozkład Pareto o gęstości  $f(w_1) = \frac{4}{(1+w_1)^5}$  dla  $w_1 > 0$ , natomiast  $W_{n+1}$  ma rozkład, przy danych  $w_1, \dots, w_n$  o funkcji gęstości

$$f(w_{n+1}|w_1, \dots, w_n) = \begin{cases} \frac{4}{(1+w_{n+1})^5}, & \text{gdy } w_n \leq 1, \\ \frac{3}{(1+w_{n+1})^4}, & \text{gdy } w_n > 1. \end{cases}$$

Wyznaczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(W_n)$ .

**Odp.**  $\frac{31}{90}$