Zadanie 1. Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku w łańcuchu Markowa o trzech stanach $\{E_1, E_2, E_3\}$ jest postaci

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix},$$

gdzie $q \in (0,1)$ oraz $p = 1 - q$. Załóżmy, iż po nieograniczenie rosnącej liczbie kroków rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów zbiega do $P(E_1) = \frac{1}{7}$, $P(E_2) = \frac{2}{7}$ oraz $P(E_3) = \frac{4}{7}$. Obliczyć q.
Odp. $1/3$

Zadanie 2. Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ i macierz prawdopodobieństw przejścia

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozkład początkowy (w chwili 0) jest wektorem [0.5 0 0.5 0]. Z jakim prawdopodobieństwem łańcuch w chwili 100 znajdzie się w stanie e_4?
Odp. 0.65

Zadanie 3. Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów $\{e_1, e_2, e_3\}$ i macierz prawdopodobieństw przejścia

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że w chwili 0 łańcuch znajduje się w stanie e_1. Niech T oznacza chwilę, w której łańcuch po raz pierwszy znajdzie się w stanie e_2. Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej T.
Odp. 3

Zadanie 4. Macierz przejścia łańcucha Markowa o stanach $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ jest równa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech $P^n(2,1)$ będzie prawdopodobieństwem, że łańcuch po wykonaniu n kroków znajdzie się w stanie E_1, jeśli w chwili początkowej znajdował się w stanie E_2. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} P^n(2,1)$.
Odp. $2/3$

Zadanie 5. Łańcuch Markowa ma dwa stany: E_1, E_2 i macierz przejścia $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$. Niech X_n oznacza stan, w którym znajduje się łańcuch po dokonaniu n kroków ($n = 0, 1, \ldots$). Funkcję f na zbiorze stanów określamy wzorem $f(E_i) = i$ dla $i = 1, 2$. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} Cov(f(X_n), f(X_{n+1}))$.
Odp. $-1/9$

Zadanie 6. Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów $\{E_1, E_2, E_3\}$ i stałą macierz prawdopodobieństw przejścia

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2/9 & 4/9 & 3/9 \end{bmatrix}.$$

W chwili początkowej jesteśmy w stanie E_3. Jakie jest prawdopodobieństwo przebywania w stanie E_1 po dwustu krokach.
Odp. $7/12$

Zadanie 7. Rozważamy łańcuch Markowa $X_1, X_2, \ldots$ na przestrzeni stanów $\{1, 2, 3\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & 1-\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ dla $i, j = 1, 2, 3$). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem

$$\pi = \left[\tfrac{\beta}{\beta+2\alpha-\alpha\beta} \quad \tfrac{\alpha}{\beta+2\alpha-\alpha\beta} \quad \tfrac{\alpha\beta}{\beta+2\alpha-\alpha\beta} \right]$$

(gdzie $\pi_i = P(X_1 = i)$ dla $i = 1, 2, 3$). Obliczyć $P(X_3 = 1 | X_1 \neq 1, X_2 \neq 1)$.
Odp. $\beta/2$

Zadanie 8. Rozważmy łańcuch Markowa $X_0, X_1, , X_2, \ldots$ o dwóch stanach: „1" i „2", który ma następującą macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(oczywiście, element P_{ij} stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy oznacza $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$). Załóżmy ponadto, że $P(X_0 = 1) = 1$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 | X_{n+1} = 2)$.
Odp. 1/3

Zadanie 9. Rozważmy łańcuch Markowa $X_0, X_1, , X_2, \ldots$ o trzech stanach „1", „2" i „3", który ma następującą macierz prawdopodobieństw przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(oczywiście, element P_{ij} stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy oznacza $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$). Załóżmy ponadto, że $P(X_0 = 1) = 1/6$, $P(X_0 = 2) = 1/3$ i $P(X_0 = 3) = 1/2$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2).$$

Odp. 13/36

Zadanie 10. Rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż w dwóch kolejnych rzutach pojawią się „reszki". Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów. (Wskazówka: jeśli w rzucie numer n jest orzeł to przyjmijmy, że „układ jest w stanie 0". Jeśli w rzucie numer n jest reszka a w rzucie $n-1$ był orzeł, to „układ jest w stanie 1". Kończymy, gdy „układ znajdzie się w stanie 2". W ten sposób definiujemy łańcuch Markowa. Rozpatrzeć wartość oczekiwaną liczby rzutów w zależności od stanu układu.)
Odp. 6

Zadanie 11. Rozważamy łańcuch Markowa $X_1, X_2, \ldots$ na przestrzeni stanów $\{1, 2, 3\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ dla $i, j = 1, 2, 3$). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem

$$\pi = \left[\tfrac{2}{9} \quad \tfrac{4}{9} \quad \tfrac{1}{3} \right],$$

(gdzie $\pi_i = P(X_1 = i)$ dla $i = 1, 2, 3$). Obliczyć $P(X_3 = 1 | X_2 \neq 1, X_1 \neq 1)$.
Odp. 1/8

Zadanie 12. Macierz prawdopodobieństw przejścia w jednym kroku dla łańcucha Markowa $X_0, X_1, X_2, \ldots$ o trzech stanach $\{1, 2, 3\}$ jest postaci

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix},$$

(oczywiście, element P_{ij} stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy oznacza $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$). Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} Cov(X_n, X_{n+1})$.
Odp. 0.125