

**Zadanie 1.** Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku w łańcuchu Markowa o trzech stanach  $\{E_1, E_2, E_3\}$  jest postaci

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix},$$

gdzie  $q \in (0, 1)$  oraz  $p = 1 - q$ . Załóżmy, iż po nieograniczenie rosnącej liczbie kroków rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów zbiega do  $P(E_1) = \frac{1}{7}$ ,  $P(E_2) = \frac{2}{7}$  oraz  $P(E_3) = \frac{4}{7}$ . Obliczyć  $q$ .

**Odp.**  $1/3$

**Zadanie 2.** Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  i macierz prawdopodobieństw przejścia

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozkład początkowy (w chwili 0) jest wektorem  $[0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0]$ . Z jakim prawdopodobieństwem łańcuch w chwili 100 znajdzie się w stanie  $e_4$ ?

**Odp.**  $0.65$

**Zadanie 3.** Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów  $\{e_1, e_2, e_3\}$  i macierz prawdopodobieństw przejścia

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że w chwili 0 łańcuch znajduje się w stanie  $e_1$ . Niech  $T$  oznacza chwilę, w której łańcuch po raz pierwszy znajdzie się w stanie  $e_2$ . Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $T$ .

**Odp.**  $3$

**Zadanie 4.** Macierz przejścia łańcucha Markowa o stanach  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  jest równa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech  $P^n(2, 1)$  będzie prawdopodobieństwem, że łańcuch po wykonaniu  $n$  kroków znajdzie się w stanie  $E_1$ , jeśli w chwili początkowej znajdował się w stanie  $E_2$ . Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(2, 1)$ .

**Odp.**  $2/3$

**Zadanie 5.** Łańcuch Markowa ma dwa stany:  $E_1, E_2$  i macierz przejścia  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ . Niech  $X_n$  oznacza stan, w którym znajduje się łańcuch po dokonaniu  $n$  kroków ( $n = 0, 1, \dots$ ). Funkcję  $f$  na zbiorze stanów określamy wzorem  $f(E_i) = i$  dla  $i = 1, 2$ . Obliczyć granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} Cov(f(X_n), f(X_{n+1}))$ .

**Odp.**  $-1/9$

**Zadanie 6.** Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów  $\{E_1, E_2, E_3\}$  i stałą macierz prawdopodobieństw przejścia

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2/9 & 4/9 & 3/9 \end{bmatrix}.$$

W chwili początkowej jesteśmy w stanie  $E_3$ . Jakie jest prawdopodobieństwo przebywania w stanie  $E_1$  po dwustu krokach.

**Odp.**  $7/12$

**Zadanie 7.** Rozważamy łańcuch Markowa  $X_1, X_2, \dots$  na przestrzeni stanów  $\{1, 2, 3\}$  o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 \\ \beta & 1 - \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie  $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$  dla  $i, j = 1, 2, 3$ ). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem

$$\pi = \left[ \frac{\beta}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta} \quad \frac{\alpha}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta} \quad \frac{\alpha\beta}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta} \right]$$

(gdzie  $\pi_i = P(X_1 = i)$  dla  $i = 1, 2, 3$ ). Obliczyć  $P(X_3 = 1 | X_1 \neq 1, X_2 \neq 1)$ .

**Odp.**  $\beta/2$

**Zadanie 8.** Rozważmy łańcuch Markowa  $X_0, X_1, X_2, \dots$  o dwóch stanach: „1” i „2”, który ma następującą macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(oczywiście, element  $P_{ij}$  stojący w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie tej macierzy oznacza  $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ ). Załóżmy ponadto, że  $P(X_0 = 1) = 1$ . Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1 | X_{n+1} = 2)$ .

**Odp.**  $1/3$

**Zadanie 9.** Rozważmy łańcuch Markowa  $X_0, X_1, X_2, \dots$  o trzech stanach „1”, „2” i „3”, który ma następującą macierz prawdopodobieństw przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(oczywiście, element  $P_{ij}$  stojący w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie tej macierzy oznacza  $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ ). Załóżmy ponadto, że  $P(X_0 = 1) = 1/6$ ,  $P(X_0 = 2) = 1/3$  i  $P(X_0 = 3) = 1/2$ . Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2).$$

**Odp.**  $13/36$

**Zadanie 10.** Rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż w dwóch kolejnych rzutach pojawią się „reszki”. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów. (Wskazówka: jeśli w rzucie numer  $n$  jest orzeł to przyjmijmy, że „układ jest w stanie 0”. Jeśli w rzucie numer  $n$  jest reszka a w rzucie  $n - 1$  był orzeł, to „układ jest w stanie 1”. Kończymy, gdy „układ znajdzie się w stanie 2”. W ten sposób definiujemy łańcuch Markowa. Rozpatrzyć wartość oczekiwaną liczby rzutów w zależności od stanu układu.)

**Odp.** 6

**Zadanie 11.** Rozważamy łańcuch Markowa  $X_1, X_2, \dots$  na przestrzeni stanów  $\{1, 2, 3\}$  o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie  $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$  dla  $i, j = 1, 2, 3$ ). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem

$$\pi = \left[ \frac{2}{9} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{1}{3} \right],$$

(gdzie  $\pi_i = P(X_1 = i)$  dla  $i = 1, 2, 3$ ). Obliczyć  $P(X_3 = 1 | X_2 \neq 1, X_1 \neq 1)$ .

**Odp.**  $1/8$

**Zadanie 12.** Macierz prawdopodobieństw przejścia w jednym kroku dla łańcucha Markowa  $X_0, X_1, X_2, \dots$  o trzech stanach  $\{1, 2, 3\}$  jest postaci

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix},$$

(oczywiście, element  $P_{ij}$  stojący w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie tej macierzy oznacza  $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ ).  
Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} Cov(X_n, X_{n+1})$ .

**Odp.** 0.125