

1. W sprzedaży znajdują się produkty wytwarzane w trzech różnych zakładach  $Z_1, Z_2, Z_3$ , których udziały w rynku wynoszą odpowiednio 40%, 35%, 25%. Wiadomo, że wadliwość produkcji poszczególnych zakładów wynosi odpowiednio 1%, 2%, 3%. Wyznaczyć udziały produkcji poszczególnych zakładów wśród produktów dostarczanych do punktu napraw gwarancyjnych.

.....  
Określmy zdarzenia:

$A$  — losowo wybrany produkt będzie wadliwy (trafi do punktu napraw);

$B_1$  — losowo wybrany produkt wytworzony został w zakładzie  $Z_1$ ;

$B_2$  — losowo wybrany produkt wytworzony został w zakładzie  $Z_2$ ;

$B_3$  — losowo wybrany produkt wytworzony został w zakładzie  $Z_3$ ;

Mamy wyznaczyć prawdopodobieństwa:  $P(B_1|A)$ ,  $P(B_2|A)$  oraz  $P(B_3|A)$ .

Obliczymy  $P(B_1|A)$ . Skorzystamy ze wzoru Bayesa:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}$$

Ponieważ zdarzenia  $B_1, B_2, B_3$  są wzajemnie wykluczające się, więc prawdopodobieństwo wylosowania wadliwego produktu wyznaczymy korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

Z warunków zadania mamy:

$$P(B_1) = 0.40, P(B_2) = 0.35, P(B_3) = 0.25$$

$$P(A|B_1) = 0.01, P(A|B_2) = 0.02, P(A|B_3) = 0.03$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy

$$P(A) = 0.0185,$$

czyli na rynku jest 1.85% wadliwych produktów.

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy  $P(B_1|A) = \frac{0.004}{0.0185} \approx 0.2162$ .

W podobny sposób obliczamy  $P(B_2|A) \approx 0.3784$  oraz  $P(B_3|A) \approx 0.4054$ .

Wśród produktów dostarczanych do punktu napraw jest 21.62% produktów pochodzących z zakładu  $Z_1$ , 37.84% produktów z zakładu  $Z_2$  oraz 40.54% produktów z zakładu  $Z_3$ .

2. Funkcja gęstości dana jest wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{dla } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć  $E(X + Y|X \geq 0.5)$ .

.....  
Z własności wartości oczekiwanej mamy

$$E(X + Y|X \geq 0.5) = E(X|X \geq 0.5) + E(Y|X \geq 0.5).$$

Znajdziemy gęstości rozkładów warunkowych:  $f_{X|X \geq 0.5}(x)$  oraz  $f_{Y|X \geq 0.5}(y)$ .

Dystrybuanta pierwszego rozkładu warunkowego:

$$\begin{aligned} F_{X|X \geq 0.5}(x) &= P\{X \leq x|X \geq 0.5\} = \frac{P\{X \leq x \& X \geq 0.5\}}{P\{X \geq 0.5\}} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{P\{0.5 \leq X \leq x\}}{P\{X \geq 0.5\}}, & \text{dla } x > 0.5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{\int_{0.5}^x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y) dy \right] dt}{\int_{0.5}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y) dy \right] dt}, & \text{dla } x > 0.5 \end{cases} \end{aligned}$$

Wyznaczamy gęstość rozkładu brzegowego zmiennej losowej  $X$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 (x + y) dy = x + 1/2, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$F_{X|X \geq 0.5}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{\int_{0.5}^x (t+0.5) dt}{\int_{0.5}^{\infty} (t+0.5) dt}, & \text{dla } x > 0.5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{4}{5} (x^2 - x - \frac{3}{4}), & \text{dla } 0.5 < x < 1, \\ 1, & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

czyli gęstość wyraża się wzorem

$$f_{X|X \geq 0.5}(x) = F'_{X|X \geq 0.5}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{4}{5} (2x - 1), & \text{dla } 0.5 < x < 1, \\ 1, & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

A zatem

$$E(X|X \geq 0.5) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|X \geq 0.5}(x) dx = \int_{0.5}^1 x \frac{4}{5} (2x - 1) dx = \frac{1}{6}.$$

Dystrybuanta drugiego rozkładu warunkowego:

$$\begin{aligned} F_{Y|X \geq 0.5}(y) &= P\{Y \leq y|X \geq 0.5\} = \frac{P\{Y \leq y \& X \geq 0.5\}}{P\{X \geq 0.5\}} \\ &= \frac{\int_{0.5}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^y f(t, u) du \right] dt}{\int_{0.5}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t, u) du \right] dt} = \begin{cases} 0, & \text{dla } y < 0, \\ 1.6(0.375y + 0.25y^2), & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{dla } y > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

czyli gęstość wyraża się wzorem

$$f_{Y|X \geq 0.5}(y) = F'_{Y|X \geq 0.5}(y) = \begin{cases} 0, & \text{dla } y < 0, \\ 1.6(0.375 + 0.5y), & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{dla } y > 1 \end{cases}$$

A zatem

$$E(Y|X \geq 0.5) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X \geq 0.5}(y) dy = \int_0^1 y 1.6(0.375 + 0.5y) dx = \frac{1.7}{6}.$$

Tak więc

$$E(X + Y|X \geq 0.5) = \frac{1}{6} + \frac{1.7}{6} = 0.45$$

3. Zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3, X_4$  są niezależne i mają jednakowy rozkład normalny  $N(0, \sigma^2)$ . Obliczyć  $P(5X_1 - X_2 > X_3 - 5X_4)$ .

.....  
Zauważmy, że

$$P(5X_1 - X_2 > X_3 - 5X_4) = P(5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4 > 0)$$

Z własności rozkładu normalnego wiadomo, że zmienna losowa  $5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4$  ma rozkład normalny z parametrami:

$$E(5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4) = 5EX_1 - EX_2 - EX_3 + 5EX_4 = 0$$

$$\begin{aligned} D^2(5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4) &= (\text{niezależność zmiennych losowych } X_1, X_2, X_3, X_4) \\ &D^2(5X_1) + D^2X_2 + D^2X_3 + D^2(5X_4) \\ &= 25D^2(X_1) + D^2X_2 + D^2X_3 + 25D^2(X_4) = 52\sigma^2. \end{aligned}$$

Tak więc, zmienna losowa

$$\xi = \frac{5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4}{\sigma\sqrt{52}}$$

ma standardowy rozkład normalny, to znaczy rozkład  $N(0, 1)$ .

Otrzymujemy

$$P(5X_1 - X_2 > X_3 - 5X_4) = P(5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4 > 0) = P(\xi > 0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Tutaj  $\Phi(\cdot)$  oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

4. Obliczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że partia pięciuset elementów, z których każdy ma czas pracy  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 500$ ) wystarczy na zapewnienie pracy urządzenia przez łącznie tysiąc godzin, gdy wiadomo, że  $ET_i = 2$  oraz  $D^2T_i = 1$ .

.....  
 Mamy obliczyć

$$P\left(\sum_{i=1}^{500} T_i > 1000\right)$$

wiedząc, że zmienne losowe  $T_i$  są niezależne, o tym samym rozkładzie takim, że  $ET_i = 2$  oraz  $D^2T_i = 1$ . Skorzystamy tutaj z Centralnego Twierdzenia Granicznego głoszącego, że

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n T_i - nET_1}{\sqrt{nD^2T_1}} < u\right) \approx \Phi(u),$$

gdzie  $\Phi(u)$  oznacza wartość w punkcie  $u$  dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Mamy

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{500} T_i > 1000\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{500} T_i - 500 \cdot 2 > 1000 - 500 \cdot 2\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} T_i - 500 \cdot 2}{\sqrt{500 \cdot 1}} > \frac{1000 - 500 \cdot 2}{\sqrt{500 \cdot 1}}\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} T_i - 1000}{\sqrt{500}} > 0\right) \\ &\approx 1 - \Phi(0) = 0.5. \end{aligned}$$

A zatem, z prawdopodobieństwem około 1/2 partia pięciuset elementów wystarczy na zapewnienie pracy urządzenia przez łącznie tysiąc godzin.