Spis treści

1 Wstęp

1.1 Rachunek prawdopodobieństwa

Dział matematyki zajmujący się badaniem modeli zjawisk losowych (przypadkowych) i praw nimi rządzących (*Encyklopedia Popularna PWN*, 1998)

1.2 Literatura

Literatura

1. **Feller W.,** *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa,* T. 1. PWN, Warszawa 1966

2. **Feller W.,** *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa,* T. 2. PWN, Warszawa 1969

3. **Fisz M.,** *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna,* PWN, Warszawa 1958

4. **Jasiulewicz H., Kordecki W.,** *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, przykłady i zadania,* Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002

5. **Jakubowski J., Sztencel R.,** *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa,* SCRIPT, Warszawa 2001

Literatura

6. **Jakubowski J., Sztencel R.,** *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego,* SCRIPT, Warszawa 2002

7. **Krysicki W. (i inni),** *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, część I Rachunek prawdopodobieństwa,* PWN 1995

8. **Krzyśko M.,** *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa,* UAM, Poznań 1997

9. **Niemiro W.,** *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna,* Szkoła Nauk Ścisłych, Warszawa 1999

10. **Plucińska A., Pluciński E.,** *Probabilistyka,* WNT, Warszawa 2000

1.3 Podstawy

Pojęciem pierwotnym w rachunku prawdopodobieństwa jest **przestrzeń zdarzeń elementarnych** Ω.

2 Miara prawdopodobieństwa

2.1 Definicja i własności

Prawdopodobieństwo

Definicja σ-ciała
Rodzinę zbiorów $\mathcal{F}$ spełniającą warunki

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$

- Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
- Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, \ldots$, to $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

nazywamy σ – ciałem podzbiorów zbioru Ω

Zdarzenie losowe
Elementy rodziny $\mathcal{F}$ nazywamy **zdarzeniami losowymi**

Prawdopodobieństwo

Definicja
Dowolna funkcja $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ taka, że

- $(\forall A \in \mathcal{F})\ P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Jeśli $(A_i)_{i=1,2,\ldots} \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Przestrzeń probabilistyczna

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Prawdopodobieństwo

Własności
$A,\ B,\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$

- $P(\emptyset) = 0$
- jeżeli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie $A' = \Omega \setminus A$

Prawdopodobieństwo

Własności
$A,\ B,\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$

- Jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leq P(B)$
- $P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja
Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B takiego, że $P(B) > 0$ nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wzór łańcuchowy
Jeśli $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

2.3 Prawdopodobieństwo całkowite

Prawdopodobieństwo całkowite

Rozbicie przestrzeni
Rozbiciem przestrzeni Ω nazywamy rodzinę zdarzeń $\{H_i\}_{i=1,\ldots,n}$, które wzajemnie wykluczają się, zaś ich suma jest równa Ω.

Prawdopodobieństwo całkowite

Niech $\{H_i\}_{i=1,\dots,n}$ będzie rozbiciem przestrzeni Ω na zdarzenia o dodatnich prawdopodobieństwach. Wówczas dla dowolnego zdarzenia A zachodzi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Prawdopodobieństwo całkowite - przykład

Zadanie
Przedsiębiorstwo zawarło umowy z zakładami Z_1, Z_2 oraz Z_3 na dostawę podzespołów. Zakład Z_1 dostarcza 50%, zakład Z_2 dostarcza 35% natomiast zakład Z_3 dostarcza 15% potrzebnych podzespołów. Wiadomo, że 95% dostaw zakładu Z_1, 80% dostaw zakładu Z_2 oraz 85% dostaw zakładu Z_3 odpowiada wymaganiom technicznym. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden wylosowany podzespół odpowiada wymaganiom technicznym?

Prawdopodobieństwo całkowite - przykład

Rozwiązanie
A - zdarzenie polegające na wylosowaniu podzespołu odpowiadającemu wymogom technicznym.

B_1 - zdarzenie polegające na wylosowaniu podzespołu wyprodukowanego w zakładzie Z_1.

B_2 - zdarzenie polegające na wylosowaniu podzespołu wyprodukowanego w zakładzie Z_2.

B_3 - zdarzenie polegające na wylosowaniu podzespołu wyprodukowanego w zakładzie Z_3.

Prawdopodobieństwo całkowite - przykład

Rozwiązanie

$$P(A|B_1) = 0.95 \quad P(B_1) = 0.50$$
$$P(A|B_2) = 0.80 \quad P(B_2) = 0.35$$
$$P(A|B_3) = 0.85 \quad P(B_3) = 0.15$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.8825 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Wzór Bayesa

Niech $\{H_i\}_{i=1,\dots,n}$ będzie rozbiciem Ω na zdarzenia o dodatnich prawdopodobieństwach i $P(A) > 0$. Wówczas dla dowolnego $j \in \{1, \dots, n\}$ mamy

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Wzór Bayesa - przykład

Pacjentka zrobiła mammografię i dostała pozytywny wynik.

CZY MAM RAKA, DOKTORZE?

Chcemy podać ryzyko tego, że pacjentka z pozytywnym wynikiem mammografii ma raka to znaczy, chcemy wyznaczyć

$$P\{\text{osoba chora}|\text{wynik pozytywny}\}$$

Wzór Bayesa - przykład

Wiadomo: czułość testu mammografii wynosi 87%

$$P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} = 0.87$$

Wiadomo: swoistość testu mammografii 93%

$$P\{\text{wynik negatywny}|\text{osoba zdrowa}\} = 0.93$$

Wzór Bayesa - przykład

Wiadomo: częstość występowania choroby wynosi 0.7%

$$P\{\text{osoba chora}\} = 0.007$$

Ogólny odsetek wyników pozytywnych

$$P\{\text{wynik pozytywny}\} =$$
$$P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} \cdot P\{\text{osoba chora}\}+$$
$$P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba zdrowa}\} \cdot P\{\text{osoba zdrowa}\} =$$
$$0.87 \cdot 0.007 + 0.07 \cdot 0.993 = 0.0756$$

Wzór Bayesa - przykład

Ryzyko choroby przy pozytywnym wyniku

$$P\{\text{osoba chora}|\text{wynik pozytywny}\} =$$
$$\frac{P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} \cdot P\{\text{osoba chora}\}}{P\{\text{wynik pozytywny}\}} =$$
$$\frac{0.87 \cdot 0.007}{0.0756} = 0.0805$$

Odpowiedź lekarza

RYZYKO TEGO, ŻE MA PANI RAKA WYNOSI 8.05%.

2.4 Niezależność zdarzeń

Niezależność zdarzeń

Definicja

Zdarzenia A oraz B nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0.$$

Twierdzenie

Zdarzenia A oraz B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Niezależność zdarzeń

Definicja

Zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(A_{i1} \cap \dots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \dots P(A_{ik})$$

dla $1 \leq i_i < i_2 < \cdots < i_k \leq n,\ k = 2, 3, \dots, n$

Niezależność zdarzeń

Twierdzenie
Jeżeli wzajemnie wykluczające się zdarzenia A oraz B są takie, że $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$, to nie są to zdarzenia niezależne

Dowód
Zdarzenia A oraz B są wzajemnie wykluczające się, więc $A \cap B = \emptyset$.

Zatem $P(A \cap B) = 0$.

Ponieważ $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$, więc $P(A)P(B) > 0$.

Czyli $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

Zdarzenia A oraz B nie są niezależne