

## Spis treści

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1	Rachunek prawdopodobieństwa . . . . .	1
1.2	Literatura . . . . .	1
1.3	Podstawy . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Miara prawdopodobieństwa</b>	<b>2</b>
2.1	Definicja i własności . . . . .	2
2.2	Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	4
2.3	Prawdopodobieństwo całkowite . . . . .	4
2.4	Niezależność zdarzeń . . . . .	7

## 1 Wstęp

### 1.1 Rachunek prawdopodobieństwa

Dział matematyki zajmujący się badaniem modeli zjawisk losowych (przypadkowych) i praw nimi rządzących (*Encyklopedia Popularna PWN*, 1998)

### 1.2 Literatura

#### Literatura

1. **Feller W.**, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, T. 1. PWN, Warszawa 1966
2. **Feller W.**, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, T. 2. PWN, Warszawa 1969
3. **Fisz M.**, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1958

4. **Jasiulewicz H., Kordecki W.**, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002
5. **Jakubowski J., Sztencel R.**, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa 2001

## Literatura

6. **Jakubowski J., Sztencel R.**, *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego*, SCRIPT, Warszawa 2002
7. **Krysicki W. (i inni)**, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, część I Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN 1995
8. **Krzyśko M.**, *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa*, UAM, Poznań 1997
9. **Niemiro W.**, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Szkoła Nauk Ścisłych, Warszawa 1999
10. **Plucińska A., Pluciński E.**, *Probabilistyka*, WNT, Warszawa 2000

## 1.3 Podstawy

Pojęciem pierwotnym w rachunku prawdopodobieństwa jest **przestrzeń zdarzeń elementarnych**  $\Omega$ .

## 2 Miara prawdopodobieństwa

### 2.1 Definicja i własności

#### Prawdopodobieństwo

##### Definicja $\sigma$ -ciała

Rodzinę zbiorów  $\mathcal{F}$  spełniającą warunki

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$

- Jeśli  $A \in \mathcal{F}$ , to  $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
- Jeśli  $A_i \in \mathcal{F}$  dla  $i = 1, 2, \dots$ , to  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

nazywamy  $\sigma$  – ciałem podzbiorów zbioru  $\Omega$

### Zdarzenie losowe

Elementy rodziny  $\mathcal{F}$  nazywamy **zdarzeniami losowymi**

### Prawdopodobieństwo

#### Definicja

Dowolna funkcja  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że

- $(\forall A \in \mathcal{F}) P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Jeśli  $(A_i)_{i=1,2,\dots} \in \mathcal{F}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$ , to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

### Przestrzeń probabilistyczna

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

### Prawdopodobieństwo

#### Własności

$A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

- $P(\emptyset) = 0$
- jeżeli  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$ , to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- $P(A') = 1 - P(A)$ , gdzie  $A' = \Omega \setminus A$

## Prawdopodobieństwo

### Własności

$A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

- Jeśli  $A \subseteq B$ , to  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- Jeśli  $A \subseteq B$ , to  $P(A) \leq P(B)$
- $P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 2.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

### Prawdopodobieństwo warunkowe

#### Definicja

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia  $A$  pod warunkiem zajścia zdarzenia  $B$  takiego, że  $P(B) > 0$  nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

#### Wzór łańcuchowy

Jeśli  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ , to

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

## 2.3 Prawdopodobieństwo całkowite

### Prawdopodobieństwo całkowite

#### Rozbicie przestrzeni

Rozbiciem przestrzeni  $\Omega$  nazywamy rodzinę zdarzeń  $\{H_i\}_{i=1, \dots, n}$ , które wzajemnie wykluczają się, zaś ich suma jest równa  $\Omega$ .

### Prawdopodobieństwo całkowite

Niech  $\{H_i\}_{i=1,\dots,n}$  będzie rozbiem przestrzeni  $\Omega$  na zdarzenia o dodatnich prawdopodobieństwach. Wówczas dla dowolnego zdarzenia  $A$  zachodzi

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)$$

### **Prawdopodobieństwo całkowite - przykład**

#### **Zadanie**

Przedsiębiorstwo zawarło umowy z zakładami  $Z_1$ ,  $Z_2$  oraz  $Z_3$  na dostawę podzespołów. Zakład  $Z_1$  dostarcza 50%, zakład  $Z_2$  dostarcza 35% natomiast zakład  $Z_3$  dostarcza 15% potrzebnych podzespołów. Wiadomo, że 95% dostaw zakładu  $Z_1$ , 80% dostaw zakładu  $Z_2$  oraz 85% dostaw zakładu  $Z_3$  odpowiada wymaganiom technicznym. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden wylosowany podzespół odpowiada wymaganiom technicznym?

### **Prawdopodobieństwo całkowite - przykład**

#### **Rozwiązanie**

$A$  - zdarzenie polegające na wylosowaniu podzespołu odpowiadającego wymogom technicznym.

$B_1$  - zdarzenie polegające na wylosowaniu podzespołu wyprodukowanego w zakładzie  $Z_1$ .

$B_2$  - zdarzenie polegające na wylosowaniu podzespołu wyprodukowanego w zakładzie  $Z_2$ .

$B_3$  - zdarzenie polegające na wylosowaniu podzespołu wyprodukowanego w zakładzie  $Z_3$ .

### **Prawdopodobieństwo całkowite - przykład**

#### **Rozwiązanie**

$$P(A|B_1) = 0.95 \quad P(B_1) = 0.50$$

$$P(A|B_2) = 0.80 \quad P(B_2) = 0.35$$

$$P(A|B_3) = 0.85 \quad P(B_3) = 0.15$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ &= 0.8825 \end{aligned}$$

## Prawdopodobieństwo całkowite

### Wzór Bayesa

Niech  $\{H_i\}_{i=1,\dots,n}$  będzie rozbiciem  $\Omega$  na zdarzenia o dodatnich prawdopodobieństwach i  $P(A) > 0$ . Wówczas dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, n\}$  mamy

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)}$$

## Prawdopodobieństwo całkowite

### Wzór Bayesa - przykład

Pacjentka zrobiła mammografię i dostała pozytywny wynik.

CZY MAM RAKA, DOKTORZE?

Chcemy podać ryzyko tego, że pacjentka z pozytywnym wynikiem mammografii ma raka to znaczy, chcemy wyznaczyć

$$P\{\text{osoba chora}|\text{wynik pozytywny}\}$$

### Wzór Bayesa - przykład

**Wiadomo: czułość testu mammografii wynosi 87%**

$$P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} = 0.87$$

**Wiadomo: swoistość testu mammografii 93%**

$$P\{\text{wynik negatywny}|\text{osoba zdrowa}\} = 0.93$$

### Wzór Bayesa - przykład

**Wiadomo: częstość występowania choroby wynosi 0.7%**

$$P\{\text{osoba chora}\} = 0.007$$

### Ogólny odsetek wyników pozytywnych

$$\begin{aligned} P\{\text{wynik pozytywny}\} &= \\ P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} \cdot P\{\text{osoba chora}\} &+ \\ P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba zdrowa}\} \cdot P\{\text{osoba zdrowa}\} &= \\ 0.87 \cdot 0.007 + 0.07 \cdot 0.993 &= 0.0756 \end{aligned}$$

### Wzór Bayesa - przykład

#### Ryzyko choroby przy pozytywnym wyniku

$$\begin{aligned} P\{\text{osoba chora}|\text{wynik pozytywny}\} &= \\ \frac{P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} \cdot P\{\text{osoba chora}\}}{P\{\text{wynik pozytywny}\}} &= \\ \frac{0.87 \cdot 0.007}{0.0756} &= 0.0805 \end{aligned}$$

#### Odpowiedź lekarza

RYZIKO TEGO, ŻE MA PANI RAKA WYNOSI 8.05%.

## 2.4 Niezależność zdarzeń

### Niezależność zdarzeń

#### Definicja

Zdarzenia  $A$  oraz  $B$  nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0.$$

#### Twierdzenie

Zdarzenia  $A$  oraz  $B$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

### Niezależność zdarzeń

#### Definicja

Zdarzenia  $A_1, \dots, A_n$  nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

dla  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$

## Niezależność zdarzeń

### Twierdzenie

Jeżeli wzajemnie wykluczające się zdarzenia  $A$  oraz  $B$  są takie, że  $P(A) > 0$  oraz  $P(B) > 0$ , to nie są to zdarzenia niezależne

### Dowód

Zdarzenia  $A$  oraz  $B$  są wzajemnie wykluczające się, więc  $A \cap B = \emptyset$ .

Zatem  $P(A \cap B) = 0$ .

Ponieważ  $P(A) > 0$  oraz  $P(B) > 0$ , więc  $P(A)P(B) > 0$ .

Czyli  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ .

Zdarzenia  $A$  oraz  $B$  nie są niezależne