Spis treści

1 Zmienne losowe

Zmienne losowe

Definicja
Zmienną losową nazywamy funkcję rzeczywistą $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ taką, że

$$(\forall x \in \mathbb{R})\, \{\omega \in \Omega : \ \xi(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$$

Rozkład zmiennej losowej
Rozkładem zmiennej losowej ξ nazywamy rozkład prawdopodobieństwa P_ξ na $\mathbb{R}$ określony wzorem

$$P_\xi(A) = P(\{\omega \in \Omega : \ \xi(\omega) \in A\}) = P(\xi^{-1}(A)) \quad \text{dla } A \subset \mathbb{R}$$

1.1 Dystrybuanta

Zmienne losowe

Dystrybuanta
Dystrybuantą zmiennej losowej ξ nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ określona wzorem

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$$

Zmienne losowe

Własności dystrybuanty

- F jest niemalejąca
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
- F jest prawostronnie ciągła

Twierdzenie
Każda funkcja $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ o powyższych własnościach jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej.

Zmienne losowe

Własności dystrybuanty

- $P(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(\xi = a) = F(a) - F(a-)$
- $P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a-)$
- $P(a < \xi < b) = F(b-) - F(a)$

1.2 Dyskretne zmienne losowe

Dyskretna zmienna losowa

Definicja
Zmienna losowa ξ jest typu skokowego (dyskretna), jeżeli istnieje skończony lub przeliczalny zbiór $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ taki, że

$$P_\xi(\mathbb{X}) = 1$$

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa
Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} P\{\xi = x\}, & \text{dla } x \in \mathbb{X}, \\ 0, & \text{dla } x \notin \mathbb{X}, \end{cases}$$

nazywamy **funkcją rozkładu prawdopodobieństwa**

1.3 Ciągłe zmienne losowe

Ciągła zmienna losowa

Definicja
Zmienna losowa ξ o dystrybuancie F jest typu ciągłego, jeżeli istnieje taka funkcja $f \geq 0$, że dla każdego x zachodzi równość

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\, du$$

Funkcja gęstości
Funkcję f nazywamy funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ

W skrócie: **gęstość rozkładu prawdopodobieństwa**

Ciągła zmienna losowa

Twierdzenie
Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest taką funkcją, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

to f jest funkcją gęstości pewnej zmiennej losowej

1.4 Momenty

Momenty

Definicja
Momentem rzędu k zmiennej losowej ξ nazywamy wielkość

$$E\xi^k = \int_{\mathbb{R}} x^k F(dx)$$

Jawny wzór

$$E\xi^k = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{X}} x^k P\{\xi = x\}, \\ \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx \end{cases}$$

Momenty

Wartość oczekiwana
Wartością oczekiwaną $E\xi$ nazywamy moment rzędu 1

Jawny wzór

$$E\xi = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{X}} x P\{\xi = x\}, \\ \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \end{cases}$$

Momenty centralne

Definicja
Momentem centralnym rzędu k zmiennej losowej ξ nazywamy wielkość

$$E(\xi - E\xi)^k = \int_{\mathbb{R}} (x - E\xi)^k F(dx)$$

Jawny wzór

$$E(\xi - E\xi)^k = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{X}} (x - E\xi)^k P\{\xi = x\}, \\ \int_{\mathbb{R}} (x - E\xi)^k f(x) dx \end{cases}$$

Momenty

Wariancja

Wariancją $D^2\xi$ nazywamy moment centralny rzędu 2 Odchylenie standardowe: $D\xi = \sqrt{D^2\xi}$

Jawny wzór

$$D^2\xi = \begin{cases} \sum_{x\in\mathbb{X}}(x - E\xi)^2 P\{\xi = x\}, \\ \int_{\mathbb{R}}(x - E\xi)^2 f(x)dx \end{cases}$$

Momenty

Twierdzenie

$$D^2\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Dowód (dla dyskretnych zmiennych losowych)

$$\sum_{x\in\mathbb{X}}(x-E\xi)^2 P\{\xi = x\} = \sum_{x\in\mathbb{X}}\left(x^2-2x(E\xi)+(E\xi)^2\right) P\{\xi = x\} =$$
$$\sum_{x\in\mathbb{X}} x^2 P\{\xi = x\} - 2(E\xi)\sum_{x\in\mathbb{X}} xP\{\xi = x\} + (E\xi)^2 =$$
$$\sum_{x\in\mathbb{X}} x^2 P\{\xi = x\} - (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Dyskretna zmienna losowa - przykład

Treść

Z urny, w której są cztery kule białe i sześć zielonych losujemy ze zwracaniem trzy kule. Zmienną losową ξ jest liczba wylosowanych kul białych. Podać:

- rozkład zmiennej losowej ξ
- dystrybuantę zmiennej losowej ξ
- wartość oczekiwaną zmiennej losowej ξ
- wariancję zmiennej losowej ξ

Dyskretna zmienna losowa - przykład

Rozkład zmiennej losowej ξ

Zbiór wartości zmiennej losowej ξ: $\{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
&P\{\xi = 0\} = \\
&P\{\text{wylosowano trzy kule zielone}\} = \\
&P\{\text{los. 1=zielona\&los. 2=zielona\&los. 3=zielona}\} = \\
&P\{\text{los. 1=zielona}\}P\{\text{los. 2=zielona}\}P\{\text{los. 3=zielona}\} = \\
&= (0.6)(0.6)(0.6) = (0.6)^3
\end{aligned}$$

Dyskretna zmienna losowa - przykład

Rozkład zmiennej losowej ξ

$$\begin{aligned}
&P\{\xi = 1\} = \\
&P\{\text{wylosowano jedną kulę białą i dwie zielone}\} = \\
&P\{\text{BZZ lub ZBZ lub ZZB}\} = \\
&P\{\text{BZZ}\} + P\{\text{ZBZ}\} + P\{\text{ZZB}\} = \\
&(0.4)(0.6)(0.6) + (0.6)(0.4)(0.6) + (0.6)(0.6)(0.4) = 3(0.4)(0.6)^2
\end{aligned}$$

Dyskretna zmienna losowa - przykład

Funkcja rozkładu zmiennej losowej ξ

$$P\{\xi = x\} = \begin{cases} (0.6)^3 & \text{dla } x = 0 \\ 3(0.4)(0.6)^2 & \text{dla } x = 1 \\ 3(0.4)^2(0.6) & \text{dla } x = 2 \\ (0.4)^3 & \text{dla } x = 3 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Dyskretna zmienna losowa - przykład

Dystrybuanta zmiennej losowej ξ

$$F_\xi(t) = P\{\xi \leq t\} = \sum_{x \leq t} P\{\xi = x\} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ P\{\xi = 0\} & \text{dla } x < 1 \\ P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} & \text{dla } x < 2 \\ P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} & \text{dla } x < 3 \\ P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

Dyskretna zmienna losowa - przykład

Dystrybuanta zmiennej losowej ξ

♡ Pierwsze zadanie samodzielne:
narysować wykres dystrybuanty F_ξ

♡ Drugie zadanie samodzielne:
sprawdzić własności dystrybuanty

Dyskretna zmienna losowa - przykład

Wartość oczekiwana zmiennej losowej ξ

$$E\xi = \sum_{x \in \mathbb{X}} xP\{\xi = x\} =$$

$$\sum_{x \in \{0,1,2,3\}} xP\{\xi = x\} =$$

$$0 \cdot P\{\xi = 0\} + 1 \cdot P\{\xi = 1\} + 2 \cdot P\{\xi = 2\} + 3 \cdot P\{\xi = 3\}$$

♡ Trzecie zadanie samodzielne:
porachować wartość oczekiwaną zmiennej losowej ξ

Dyskretna zmienna losowa - przykład

Wariancja zmiennej losowej ξ

$$D^2\xi = \sum_{x \in \mathbb{X}} (x - E\xi)^2 P\{\xi = x\} =$$

$$\sum_{x \in \{0,1,2,3\}} (x - E\xi)^2 P\{\xi = x\} =$$

$$(0 - E\xi)^2 \cdot P\{\xi = 0\} + (1 - E\xi)^2 \cdot P\{\xi = 1\} +$$

$$(2 - E\xi)^2 \cdot P\{\xi = 2\} + (3 - E\xi)^2 \cdot P\{\xi = 3\}$$

♡ Czwarte zadanie samodzielne:

porachować wariancję zmiennej losowej ξ

1.5 Funkcje zmiennych losowych

Funkcje zmiennych losowych

Rozkład funkcji zmiennej losowej

Niech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i niech $\eta = h(\xi)$.

$$F_\eta(x) = P\{h(\xi) \le x\} = P\{\xi \in h^{-1}(-\infty, x\rangle\}$$

Funkcje zmiennych losowych

Rozkład funkcji zmiennej losowej - przykład

Podać rozkład zmiennej losowej $\eta = \xi^2$.

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P\{\xi^2 \le x\} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x < 0 \\ P\{-\sqrt{x} \le \xi \le \sqrt{x}\}, & \text{jeżeli } x \ge 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x < 0 \\ F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}), & \text{jeżeli } x \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Funkcje zmiennych losowych

Twierdzenie (założenia)

Niech ξ będzie zmienną losową typu ciągłego. Niech h będzie funkcją określoną na zbiorze

$$\bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k],$$

która na każdym przedziale otwartym (a_k, b_k) jest funkcją ściśle monotoniczną oraz ma ciągłą pochodną $h'(x) \neq 0$. Niech $g_k(y)$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $h(x)$ na przedziale

$$I_k = h((a_k, b_k)) = \{y : \; x \in (a_k, b_k), h(x) = y\}.$$

Funkcje zmiennych losowych

Twierdzenie (teza)
Wówczas funkcja gęstości zmiennej losowej $\eta = h(\xi)$ ma postać

$$f_\eta(y) = \sum_{k=1}^{n} f_\xi(g_k(y)) \cdot |h'(y)| \cdot I_{I_k}(y)$$

2 Rozkłady dyskretne

2.1 Rozkład dwupunktowy

Doświadczenie Bernoulliego

Określenie
Wykonujemy dwuwynikowe doświadczenie. Wyniki nazywane są umownie *sukces* oraz *porażka*. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p (porażki: $1 - p$). Zmienną losową ξ jest uzyskanie sukcesu.

Rozkład dwupunktowy $D(p)$

Definicja
Zmienna losowa ξ ma rozkład dwupunktowy z parametrem $p \in \langle 0, 1 \rangle$, jeżeli

$$P\{\xi = 1\} = p = 1 - P\{\xi = 0\}$$

Rozkład dwupunktowy $D(p)$

Momenty

$$E\xi = p$$
$$D^2\xi = p(1-p)$$

♡ Zadanie samodzielne:

sprawdzić powyższe wzory

2.2 Rozkład dwumianowy

Schemat Bernoulliego

Określenie
Dwuwynikowe doświadczenie o prawdopodobieństwie sukcesu p wykonujemy n-krotnie w sposób niezależny.

Zmienną losową ξ jest liczbą sukcesów w tym ciągu doświadczeń.

Rozkład dwumianowy $B(n,p)$

Definicja
Zmienna losowa ξ ma rozkład $B(n,p)$, jeżeli

$$P_{n,p}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Rozkład dwumianowy $B(n,p)$

Momenty

$$E\xi = np$$
$$D^2\xi = np(1-p)$$

Rozkład dwumianowy $B(n,p)$

Wartość oczekiwana

$$\begin{aligned} E\xi = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} &= \\ np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} &= \\ np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-k)!} p^j (1-p)^{n-1-k} &= np \end{aligned}$$

Rozkład dwumianowy $B(n,p)$

Wariancja
♡ Zadanie samodzielne:

wyznaczyć wariancję zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym $B(n,p)$

2.3 Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

„Schemat Bernoulliego"

Określenie
Dwuwynikowe doświadczenie o prawdopodobieństwie sukcesu p wykonujemy w sposób niezależny aż do uzyskania z góry ustalonej liczby sukcesów r.

Zmienną losową ξ jest liczba porażek w tym ciągu doświadczeń. (Zmienna losowa $\eta = \xi + r$ jest liczbą wszystkich wykonanych doświadczeń).

Rozkład ujemny dwumianowy $NB(r,p)$

Definicja
Zmienna losowa ξ ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r,p) , jeżeli

$$P_{r,p}\{\xi = k\} = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Rozkład ujemny dwumianowy $NB(r,p)$

Momenty

$$E\xi = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$D^2\xi = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

♡ Zadanie samodzielne:

sprawdzić powyższe wzory

Rozkład ujemny dwumianowy $NB(1,p)$

Szczególny przypadek
Rozkład ujemny dwumianowy z $r=1$ nazywamy **rozkładem geometrycznym**

Rozkład geometryczny

Twierdzenie (Brak pamięci)
Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład geometryczny, to

$$P\{\xi \geq k+l | \xi \geq k\} = P\{\xi \geq l\}, \quad \forall k,l > 0$$

Dowód (łatwy)
Wskazówka:
jeżeli $|q|<1$, to $\sum_{j=m}^{\infty} q^j = \frac{q^m}{1-q}$

2.4 Rozkład Poissona

Rozkład Poissona $Po(\lambda)$

Definicja
Zmienna losowa ξ ma rozkład $Po(\lambda)$, jeżeli

$$P_\lambda\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \; k = 0,1,\ldots$$

Rozkład Poissona $Po(\lambda)$

Momenty

$$E\xi = \lambda$$
$$D^2\xi = \lambda$$

♡ Zadanie samodzielne:

sprawdzić powyższe wzory

Wskazówka: $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$

2.5 Rozkład hipergeometryczny

Rozkład hipergeometryczny $H(N, M, n)$

Definicja

Zmienna losowa ξ ma rozkład hipergeometryczny z parametrami (N, M, n), jeżeli

$$P_{N,n,M}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$
$$k = k_0, k_0 + 1, \ldots, k_1,$$
$$k_0 = \max\{0, n - N + M\},\ k_1 = \min\{n, M\}.$$

Rozkład hipergeometryczny $H(N, M, n)$

Momenty

$$E\xi = n\frac{M}{N}$$
$$D^2\xi = \frac{n(N-n)M(N-M)}{(n-1)N^2}$$

3 Rozkłady ciągłe

3.1 Rozkład jednostajny

Rozkład jednostajny $U(a, b)$

Definicja

Zmienna losowa ξ ma rozkład jednostajny na przedziale (a, b), jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{(a,b)}(x)$$

Rozkład jednostajny $U(a, b)$

Momenty

$$E\xi^k = \frac{1}{b-a}\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad (k = 1, 2 \ldots),$$
$$D^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Rozkład jednostajny $U(a, b)$

Moment rzędu k

$$\begin{aligned} E\xi^k &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{a} x^k \cdot 0dx + \int_{a}^{b} x^k \frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{a} x^k \cdot 0dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

Rozkład jednostajny $U(a, b)$

Twierdzenie
Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład o dystrybuancie F, to zmienna losowa $U = F(\xi)$ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$.

Twierdzenie
Jeżeli F jest dystrybuantą oraz zmienna losowa U ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$, to zmienna losowa $\xi = F^{-1}(U)$ ma rozkład o dystrybuancie F.

3.2 Rozkład beta

Rozkład beta $Bet(a, b)$

Definicja
Zmienna losowa ξ ma rozkład beta z parametrami a oraz b ($a, b > 0$), jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ jest funkcją gamma.

Funkcja gamma

Przydatne własności

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla naturalnych n

- $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$
- $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Rozkład beta $Bet(a, b)$

Momenty

$$E\xi^k = \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)} = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}$$

$$D^2\xi = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

♡ Zadanie samodzielne:

sprawdzić powyższe wzory

Rozkład beta $Bet(1, 1)$

Szczególny przypadek
Rozkład beta z $a = b = 1$ jest **rozkładem jednostajnym** $U(0, 1)$

3.3 Rozkład gamma

Rozkład gamma $G(\alpha, \lambda)$

Definicja
Zmienna losowa ξ ma rozkład gamma z parametrami α oraz λ ($\alpha, \lambda > 0$), jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

Rozkład gamma $G(\alpha, \lambda)$

Momenty

$$E\xi^k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\cdot\lambda^k$$

$$D^2\xi = \alpha\cdot\lambda^2.$$

Rozkład gamma $G(\alpha, \lambda)$

Wartość oczekiwana

$$
\begin{aligned}
E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 dx + \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\
&= \frac{1}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{-\frac{x}{\lambda}} d\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \lambda \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\lambda
\end{aligned}
$$

Rozkład gamma $G(\alpha, \lambda)$

Momenty

♡ Zadanie samodzielne:

wyznaczyć $E\xi^k$

wyznaczyć $D^2\xi$

Rozkład gamma $G(\alpha, \lambda)$

Szczególne przypadki

- Rozkład gamma z $\alpha = 1$ nazywamy **rozkładem wykładniczym**
- Rozkład gamma z parametrami $\alpha = r/2$ oraz $\lambda = 2$ nazywamy **rozkładem chi-kwadrat z** r **stopniami swobody**

Rozkład wykładniczy

Twierdzenie (brak pamięci)

Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, to

$$P\{\xi \geq t + \Delta t | \xi > t\} = P\{\xi \geq \Delta t\}, \quad \forall t, \Delta t > 0$$

Dowód (łatwy)

Wskazówka:

jeżeli $t > 0$, to $\int_t^{\infty} e^{-x} dx = e^{-t}$

3.4 Rozkład normalny

Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Definicja
Zmienna losowa ξ ma rozkład normalny z parametrami μ oraz σ^2, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ -\infty < x < \infty.$$

Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Standaryzacja
Jeżeli $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, to

$$\eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Oznaczenia: $\Phi(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$

Jeżeli $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, to

$$P\{\xi \leq a\} = P\left\{\eta \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Ważna własność rozkładu $N(0, 1)$
Udowodnić, że funkcja

$$\Phi(\cdot) - \frac{1}{2}$$

jest funkcją nieparzystą.

Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Ważne prawdopodobieństwo

$$(\forall k > 0) \, P\left\{|\xi - \mu| < k\sigma\right\} = 2\Phi(k) - 1$$

$$
\begin{aligned}
P\{|\xi-\mu|<k\sigma\} =& P\{-k\sigma<\xi-\mu<k\sigma\}\\
=& P\left\{-k<\frac{\xi-\mu}{\sigma}<k\sigma\right\}\\
=& \Phi(k)-\Phi(-k)\\
=& 2\Phi(k)-1
\end{aligned}
$$

Rozkład normalny $N(\mu,\sigma^2)$

Prawo trzech sigm

$$k=1:\ P\{|\xi-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1\approx 0.68$$

$$k=2:\ P\{|\xi-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1\approx 0.95$$

$$k=3:\ P\{|\xi-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1\approx 0.997$$

Rozkład normalny $N(\mu,\sigma^2)$

Momenty

$$E\xi=\mu$$

$$D^2\xi=\sigma^2$$

$$E(\xi-\mu)^{2k}=1\cdot 3\cdot 5\cdot(2k-1)\sigma^{2k}$$

$$E(\xi-\mu)^{2k+1}=0$$

Rozkład normalny $N(\mu,\sigma^2)$

Wartość oczekiwana

$$
\begin{aligned}
E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx\ \left\{u:=\frac{x-\mu}{\sigma}, du=\frac{dx}{\sigma}\right\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(u\sigma+\mu)\,e^{-\frac{1}{2}u^2}du\\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-\frac{1}{2}u^2}du+\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}du\\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{1}{2}u^2}\right]_{-\infty}^{\infty}+\mu=\mu
\end{aligned}
$$

Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Momenty

$\heartsuit$ Zadanie samodzielne:

wyznaczyć $D^2\xi$

wyznaczyć $E(\xi - \mu)^{2k}$

wyznaczyć $E(\xi - \mu)^{2k+1}$

Wskazówka: zastosować całkowanie przez podstawienie oraz przez części