

Spis treści

Spis treści

1	Wektory losowe	1
1.1	Definicja	1
1.2	Rozkłady	1
1.3	Momenty	6
1.4	Warunkowa wartość oczekiwana	11
1.5	Wielowymiarowy rozkład normalny	14
2	Funkcje wektorów losowych	15
2.1	Suma zmiennych losowych	15
2.2	Rozkład dwumianowy	17
2.3	Rozkład ujemny dwumianowy	18
2.4	Rozkład Poissona	19
2.5	Rozkład gamma	19
2.6	Rozkład normalny	20
2.7	Rozkład normalny - inne funkcje	21
3	Twierdzenia graniczne	23
3.1	Rodzaje zbieżności	23
3.2	Prawa Wielkich Liczb	24
3.3	Centralne Twierdzenie Graniczne	26

1 Wektory losowe

1.1 Definicja

Definicja

Wektorem losowym $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ nazywamy odwzorowanie

$$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$$

takie, że dla dowolnego $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

1.2 Rozkłady

Rozkład łączny

Określenie

Rozkładem wektora losowego ξ nazywamy rozkład prawdopodobieństwa P_ξ na \mathbb{X} określony wzorem

$$P_\xi(A) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A\}) \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$$

Dystrybuanta

Dystrybantą wektora losowego ξ nazywamy funkcję $F_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ określoną wzorem

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

Rozkład łączny

Rozkład skokowy (dyskretny)

Wektor losowy jest typu skokowego, jeżeli istnieje zbiór skończony lub przeliczalny $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, taki że $P_\xi(\mathbb{X}) = 1$

Rozkład łączny

Rozkład ciągły

Wektor losowy jest typu ciągłego, jeżeli istnieje nieujemna funkcja $f_\xi(x)$ taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_\xi(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

Funkcja $f_\xi(x)$ nazywa się **gęstością**.

Rozkład łączny

Przykład: rzut dwiema sześciennymi kostkami

ξ_1 – wynik rzutu pierwszą kostką; ξ_2 – wynik rzutu drugą kostką (ξ_1, ξ_2) – wynik rzutu parą kostek Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa

$$P\{(\xi_1, \xi_2) = (i, j)\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

Dystrybuanta

$$F_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = P\{\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y\} = \sum_{(i,j): i \leq x, j \leq y} p_{ij}$$

Rozkład łączny

Przykład: strzał do okrągłej tarczy

ξ_1 – odcięta punktu trafienia; ξ_2 – rzędna punktu trafienia (ξ_1, ξ_2) – współrzędne punktu trafienia Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

$$f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \mathbf{1}_{\{x^2 + y^2 \leq r^2\}}(x, y)$$

Dystrybuanta $F_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, u) du dt$

Rozkład brzegowy

Określenie

Niech f_{ξ} będzie gęstością łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej losowej ξ_1 określona jest wzorem

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

Rozkład brzegowy

Określenie

Niech f_{ξ} będzie gęstością łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Funkcja gęstości rozkładu brzegowego wektora losowego (ξ_1, ξ_2) określona jest wzorem

$$f_{(\xi_1, \xi_2)}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n$$

Rozkład brzegowy

Przykład: rzut dwiema sześciennymi kostkami

(ξ_1, ξ_2) – wynik rzutu parą kostek Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ_1

$$P\{\xi_1 = i\} = \sum_{j=1}^6 P\{(\xi_1, \xi_2) = (i, j)\} = \sum_{j=1}^6 p_{ij}, \quad i = 1, \dots, 6$$

Dystrybuanta rozkładu zmiennej losowej ξ_1

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 \leq x\} = \sum_{i \leq x} P\{\xi_1 = i\}$$

Rozkład brzegowy

Przykład: strzał do okrągłej tarczy

(ξ_1, ξ_2) – współrzędne punktu trafienia Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ_1

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, u) du$$

Dystrybuanta

$$F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi_1}(t) dt$$

Rozkład brzegowy

Przykład: strzał do okrągłej tarczy

$$\begin{aligned} f_{\xi_1}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, u) du \\ &= \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2} du \\ &= \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, \quad \text{dla } x \in (-r, r) \end{aligned}$$

Rozkład warunkowy

Określenie

Niech $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Rozkład warunkowy wektora ξ_1 pod warunkiem $\xi_2 = x_2$ opisany jest funkcją gęstości

$$f_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1) = \frac{f_{\xi}(x_1, x_2)}{f_{\xi_2}(x_2)}$$

Niezależność

Wektory losowe ξ_1 oraz ξ_2 są niezależne, jeżeli dla wszystkich x_1 oraz x_2

$$f_{\xi}(x_1, x_2) = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)$$

Rozkład warunkowy

Przykład: rzut dwiema sześciennymi kostkami

(ξ_1, ξ_2) – wynik rzutu parą kostek Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ_2 pod warunkiem $\xi_1 = i$

$$P\{\xi_2 = j|\xi_1 = i\} = \frac{P\{(\xi_1, \xi_2) = (i, j)\}}{P\{\xi_1 = i\}}, \quad j = 1, \dots, 6$$

Rozkład warunkowy

Przykład: rzut dwiema sześciennymi kostkami

(ξ_1, ξ_2) – wynik rzutu parą kostek Niezależność

$$P\{\xi_2 = j|\xi_1 = i\} = P\{\xi_2 = j\}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad i = 1, \dots, 6$$

$$P\{(\xi_1, \xi_2) = (i, j)\} = P\{\xi_1 = i\}P\{\xi_2 = j\}, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

Rozkład warunkowy

Przykład: strzał do okrągłej tarczy

(ξ_1, ξ_2) – współrzędne punktu trafienia Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ξ_2 pod warunkiem $\xi_1 = x$

$$f_{\xi_2|\xi_1=x}(y) = \frac{f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)}{f_{\xi_1}(x)}$$

Rozkład warunkowy

Przykład: strzał do okrągłej tarczy

$$\begin{aligned} f_{\xi_2|\xi_1=x}(y) &= \frac{f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)}{f_{\xi_1}(x)} \\ &= \frac{1/\pi r^2}{2\sqrt{r^2 - x^2}/\pi r^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \text{dla } y \in (-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}) \end{aligned}$$

1.3 Momenty

Momenty

Momenty rzędu k

Niech k_1, \dots, k_n będą takimi nieujemnymi liczbami całkowitymi, że $k_1 + \dots + k_n = k$. Momentem rzędu k nazywamy

$$E\xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} f_{\xi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Moment rzędu pierwszego

Wartość oczekiwana

Jeżeli $k = 1$, to jest n możliwości:

$$\begin{aligned} k_1 = 1, k_2 = 0, \dots, k_n = 0 &\Rightarrow E\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\xi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ k_1 = 0, k_2 = 1, \dots, k_n = 0 &\Rightarrow E\xi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{\xi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\vdots \\ k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 1 &\Rightarrow E\xi_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{\xi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Moment rzędu pierwszego

Wartość oczekiwana

$$\begin{aligned} E\xi_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\xi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right] dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\xi_1}(x_1) dx_1 \end{aligned}$$

Moment rzędu pierwszego

Wartość oczekiwana

$$E\xi = \begin{bmatrix} E\xi_1 \\ \vdots \\ E\xi_n \end{bmatrix}$$

Momenty centralne

Momenty centralne rzędu k

Niech k_1, \dots, k_n będą takimi nieujemnymi liczbami całkowitymi, że $k_1 + \dots + k_n = k$. Momentem centralnym rzędu k nazywamy

$$E(\xi_1 - E\xi_1)^{k_1} \cdots (\xi_n - E\xi_n)^{k_n}$$

Momenty centralne

Moment centralny rzędu 2

$$k_1 = 2, k_2 = 0, \dots, k_n = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E(\xi_1 - E\xi_1)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - E\xi_1)^2 f_{\xi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - E\xi_1)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right] dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - E\xi_1)^2 f_{\xi_1}(x_1) dx_1 = D^2\xi_1 \end{aligned}$$

Momenty centralne

Moment centralny rzędu 2

$$k_1 = 2, k_2 = 0, \dots, k_n = 0 \Rightarrow D^2 \xi_1$$

$$k_1 = 0, k_2 = 2, \dots, k_n = 0 \Rightarrow D^2 \xi_2$$

⋮

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 2 \Rightarrow D^2 \xi_n$$

Momenty centralne

Kowariancja

$$k_1 = 1, k_2 = 1, \dots, k_n = 0 \Rightarrow E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - E\xi_1)(x_2 - E\xi_2) f_{\xi}(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - E\xi_1)(x_2 - E\xi_2) f_{(\xi_1, \xi_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= Cov(\xi_1, \xi_2)$$

$$Cov(\xi_i, \xi_j) = E\xi_i \xi_j - E\xi_i E\xi_j$$

Momenty centralne

Macierz kowariancji

$$\begin{bmatrix} D^2 \xi_1 & Cov(\xi_1, \xi_2) & \dots & Cov(\xi_1, \xi_n) \\ Cov(\xi_1, \xi_2) & D^2 \xi_2 & \dots & Cov(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Cov(\xi_1, \xi_n) & Cov(\xi_2, \xi_n) & \dots & D^2 \xi_n \end{bmatrix}$$

Momenty centralne

Przykład: rzut dwiema sześciennymi kostkami

(ξ_1, ξ_2) – wynik rzutu parą kostek Kowariancja

$$\begin{aligned} Cov(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{i,j} (x_i - E\xi_1)(x_j - E\xi_2) P\{(\xi_1, \xi_2) = (i, j)\} \\ &= \sum_{i,j} x_i x_j P\{(\xi_1, \xi_2) = (i, j)\} - E\xi_1 E\xi_2 \end{aligned}$$

Momenty centralne

Przykład: strzał do okrągłej tarczy

(ξ_1, ξ_2) – współrzędne punktu trafienia Kowariancja

$$\begin{aligned} Cov(\xi_1, \xi_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi_1)(y - E\xi_2) f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dx dy \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dx dy - E\xi_1 E\xi_2 \end{aligned}$$

Momenty centralne

Ważny fakt

Jeżeli ξ_1 oraz ξ_2 są niezależne, to

$$Cov(\xi_1, \xi_2) = 0$$

$$\begin{aligned} Cov(\xi_1, \xi_2) &= \int \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dx dy - E\xi_1 E\xi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x f_{\xi_1}(x) dx \int_{\mathbb{R}} y f_{\xi_2}(y) dy - E\xi_1 E\xi_2 \\ &= E\xi_1 E\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 \end{aligned}$$

Momenty centralne

Ważny fakt

Jeżeli $Cov(\xi_1, \xi_2) = 0$, to ξ_1 oraz ξ_2 nie muszą być niezależne!

Przykład

Zmienne losowe (ξ_1, ξ_2) mają łączny rozkład

	ξ_1	-1	0	1
ξ_2	-1	0	0.25	0
	0	0.25	0	0.25
	1	0	0.25	0

Momenty centralne

Przykład

Rozkłady brzegowe zmiennych losowych ξ_1 oraz ξ_2

$$\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array}$$

$$E\xi_1 = E\xi_2 = 0$$

Momenty centralne

Przykład

$$\begin{aligned} E\xi_1\xi_2 &= \\ &(-1) \cdot (-1) \cdot P\{(\xi_1, \xi_2) = (-1, -1)\} + \\ &(-1) \cdot 0 \cdot P\{(\xi_1, \xi_2) = (-1, 0)\} + \\ &\dots \\ &1 \cdot 0 \cdot P\{(\xi_1, \xi_2) = (1, 0)\} + \\ &1 \cdot 1 \cdot P\{(\xi_1, \xi_2) = (1, 1)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Momenty centralne

Przykład

Czyli

$$Cov(\xi_1, \xi_2) = 0$$

Ale

$$P\{(\xi_1, \xi_2) = (-1, -1)\} \neq P\{\xi_1 = -1\} \cdot P\{\xi_2 = -1\}$$

Zmienne losowe ξ_1 oraz ξ_2 nie są niezależne

Momenty centralne

Współczynnik korelacji liniowej

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \frac{Cov(\xi_i, \xi_j)}{\sqrt{D^2\xi_i D^2\xi_j}}$$

Ważne własności

$$-1 \leq \rho(\xi_i, \xi_j) \leq 1$$

Jeżeli $|\rho(\xi_i, \xi_j)| = 1$, to istnieją takie liczby rzeczywiste a i b , że

$$\xi_1 = a\xi_2 + b$$

Własności wynikają z nierówności Schwarza

Momenty centralne

Ważna własność

Jeżeli A jest macierzą liczbową odpowiednich wymiarów, to

$$EA\xi = AE\xi$$

$$DA\xi = AD\xi A^T$$

1.4 Warunkowa wartość oczekiwana

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$

Definicja

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$ zmiennej losowej ξ_1 pod warunkiem zmiennej losowej ξ_2 to nowa zmienna losowa, która jest postaci $E(\xi_1|\xi_2) = m(\xi_2)$ z prawdopodobieństwem 1 dla borelowskiej funkcji $m(x)$ takiej, że

$$\int_B m(y) dF_{\xi_2}(y) = \int \int_{B \times \mathbb{R}} x dF_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$$

dla każdego borelowskiego zbioru B .

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$

Przykład: rzut dwiema sześciennymi kostkami

(ξ_1, ξ_2) – wynik rzutu parą kostek Rozkład zmiennej losowej $E(\xi_1|\xi_2)$

$$\begin{aligned} E(\xi_1|\xi_2 = 1) & P\{\xi_2 = 1\} \\ E(\xi_1|\xi_2 = 2) & P\{\xi_2 = 2\} \\ E(\xi_1|\xi_2 = 3) & P\{\xi_2 = 3\} \\ E(\xi_1|\xi_2 = 4) & P\{\xi_2 = 4\} \\ E(\xi_1|\xi_2 = 5) & P\{\xi_2 = 5\} \\ E(\xi_1|\xi_2 = 6) & P\{\xi_2 = 6\} \end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$

Przykład: rzut dwiema sześciennymi kostkami

$$\begin{aligned} E(\xi_1|\xi_2 = j) &= \sum_{i=1}^6 iP\{\xi_1 = i|\xi_2 = j\} \\ &= \sum_{i=1}^6 i \frac{P\{\xi_1 = i, \xi_2 = j\}}{P\{\xi_2 = j\}} \\ &= \sum_{i=1}^6 i \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^6 p_{kj}} \end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$

Przykład: strzał do okrągłej tarczy

(ξ_1, ξ_2) – współrzędne punktu trafienia Rozkład zmiennej losowej $E(\xi_1|\xi_2)$

$$\begin{aligned} E(\xi_1|\xi_2 = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi_1|\xi_2=y}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \frac{f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)}{f_{\xi_2}(y)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \frac{f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{(\xi_1, \xi_2)}(t, y) dt} dx \end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$

Wartość oczekiwana

$$\begin{aligned} E(E(\xi_1|\xi_2)) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi_1|\xi_2 = x_2) f_{\xi_2}(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1) dx_1 \right] f_{\xi_2}(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{f_{(\xi_1, \xi_2)}(x_1, x_2)}{f_{\xi_2}(x_2)} dx_1 \right] f_{\xi_2}(x_2) dx_2 \\ &= E\xi_1 \end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$

Równość wariancyjna

$$D^2\xi_1 = E(D^2(\xi_1|\xi_2)) + D^2(E(\xi_1|\xi_2))$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$ - przykład

Rozkład łączny zmiennych losowych (ξ_1, ξ_2)

	ξ_1	-1	0	1
ξ_2	-1	0.1	0.2	0.0
	0	0.0	0.2	0.1
	1	0.1	0.2	0.1

Rozkłady brzegowe

$$\xi_1 : \frac{-1 \quad 0 \quad 1}{0.2 \quad 0.6 \quad 0.2} \quad \xi_2 : \frac{-1 \quad 0 \quad 1}{0.3 \quad 0.3 \quad 0.4}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$ - przykład

Rozkłady warunkowe

$$\xi_1|\xi_2 = -1 : \frac{-1 \quad 0 \quad 1}{1/3 \quad 2/3 \quad 0}$$

$$\xi_1|\xi_2 = 0 : \frac{-1 \quad 0 \quad 1}{0 \quad 2/3 \quad 1/3}$$

$$\xi_1|\xi_2 = 1 : \frac{-1 \quad 0 \quad 1}{1/4 \quad 1/2 \quad 1/4}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$ - przykład

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$

$$E(\xi_1|\xi_2 = -1) = -1/3 \quad \text{z prawd.} \quad P\{\xi_2 = -1\} = 0.3$$

$$E(\xi_1|\xi_2 = 0) = 1/3 \quad \text{z prawd.} \quad P\{\xi_2 = 0\} = 0.3$$

$$E(\xi_1|\xi_2 = 1) = 0 \quad \text{z prawd.} \quad P\{\xi_2 = 1\} = 0.4$$

$$E(E(\xi_1|\xi_2)) = 0 = E\xi_1$$

$$D^2(E(\xi_1|\xi_2)) = 2/30$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\xi_1|\xi_2)$ - przykład

Warunkowa wariancja $D^2(\xi_1|\xi_2)$

$$D^2(\xi_1|\xi_2 = -1) = 2/9 \quad \text{z prawd.} \quad P\{\xi_2 = -1\} = 0.3$$

$$D^2(\xi_1|\xi_2 = 0) = 2/9 \quad \text{z prawd.} \quad P\{\xi_2 = 0\} = 0.3$$

$$D^2(\xi_1|\xi_2 = 1) = 1/2 \quad \text{z prawd.} \quad P\{\xi_2 = 1\} = 0.4$$

$$E(D^2(\xi_1|\xi_2)) = 1/3$$

$$E(D^2(\xi_1|\xi_2)) + D^2(E(\xi_1|\xi_2)) = 1/3 + 2/30 = 0.4 = D^2\xi_1$$

1.5 Wielowymiarowy rozkład normalny

Wielowymiarowy rozkład normalny $N_p(\mu, \Sigma)$

Określenie

Wektor losowy $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_p]^T$ ma p -wymiarowy rozkład normalny, jeżeli jego funkcja gęstości prawdopodobieństwa wyraża się wzorem

$$f_{\mu, \Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}$$

dla $x \in \mathbb{R}^p$

Wielowymiarowy rozkład normalny $N_p(\mu, \Sigma)$

Momenty

Wektor wartości oczekiwanych $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_p]^T$ Macierz kowariancji $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1,\dots,p}$

$$E\xi_i = \mu_i, \quad D^2\xi_i = \sigma_{ii}, \quad Cov(\xi_i, \xi_j) = \sigma_{ij}$$

$$D^2\xi_i = \sigma_i^2$$

Wielowymiarowy rozkład normalny $N_p(\mu, \Sigma)$

Rozkłady brzegowe

Fakt: jeżeli A jest $r \times p$ macierzą, to

$$A\xi \sim N_r(A\mu, A\Sigma A^T)$$

Każdy rozkład brzegowy jest normalny $\xi_1 = [1, 0, \dots, 0]\xi$

Wielowymiarowy rozkład normalny $N_p(\mu, \Sigma)$

Rozkłady warunkowe

Niech

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Rozkład wektora ξ_1 pod warunkiem $\xi_2 = x_2$ jest rozkładem normalnym

$$N_m(\mu_1 + \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T (x_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T)$$

Wielowymiarowy rozkład normalny $N_p(\mu, \Sigma)$

Rozkłady warunkowe

$$E(\xi_1 | \xi_2) = \mu_1 + \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T (\xi_2 - \mu_2)$$

Wielowymiarowy rozkład normalny $N_p(\mu, \Sigma)$

Rozkłady warunkowe

ξ_1 oraz ξ_2 są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Sigma_{12} = 0$$

W szczególności ξ_i oraz ξ_j są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_{ij} = 0$

2 Funkcje wektorów losowych

2.1 Suma zmiennych losowych

Rozkład sumy zmiennych losowych

Niech $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ o gęstości $f_\xi(x_1, x_2)$. Niech $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$$F_\eta(x) = P\{\xi_1 + \xi_2 \leq x\}$$

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x)$$

Rozkład sumy zmiennych losowych

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P\{\xi_1 + \xi_2 \leq x\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{\xi_1 \leq x - x_2 | \xi_2 = x_2\} f_{\xi_2}(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{x-x_2} f_{\xi_1 | \xi_2 = x_2}(x_1) dx_1 \right] f_{\xi_2}(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^x f_{\xi_1 | \xi_2 = x_2}(t - x_2) dt \right] f_{\xi_2}(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1 | \xi_2 = x_2}(t - x_2) f_{\xi_2}(x_2) dx_2 \right] dt \end{aligned}$$

Rozkład sumy zmiennych losowych

Funkcja gęstości

$$f_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1 | \xi_2 = x_2}(t - x_2) f_{\xi_2}(x_2) dx_2$$

Jeżeli ξ_1 oraz ξ_2 są niezależne, to

$$f_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(t - x_2) f_{\xi_2}(x_2) dx_2$$

Rozkład sumy zmiennych losowych

Wartość oczekiwana

$$E\eta = \int_{\mathbb{R}} x f_\eta(x) dx$$

Rozkład sumy zmiennych losowych

Wartość oczekiwana

$$\begin{aligned}
& E(\xi_1 + \xi_2) \\
&= \int \int_{\mathbb{R}^2} (x + y) f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} x \left[\int_{\mathbb{R}} f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dy \right] dx + \int_{\mathbb{R}} y \left[\int_{\mathbb{R}} f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dx \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} x f_{\xi_1}(x) dx + \int_{\mathbb{R}} y f_{\xi_2}(y) dy \\
&= E\xi_1 + E\xi_2
\end{aligned}$$

Rozkład sumy zmiennych losowych

Wariancja

$$D^2(\xi_1 + \xi_2) = D^2\xi_1 + D^2\xi_2 + 2Cov(\xi_1, \xi_2)$$

Jeżeli ξ_1 oraz ξ_2 są niezależne, to

$$D^2(\xi_1 + \xi_2) = D^2\xi_1 + D^2\xi_2$$

2.2 Rozkład dwumianowy

Rozkład dwumianowy

Twierdzenie

Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $B(n_i, p)$, $i = 1, \dots, n$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład

$$B\left(\sum_{i=1}^n n_i, p\right)$$

Wniosek

Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są i.i.d. $D(p)$, $i = 1, \dots, n$, to $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i \sim B(n, p)$

Rozkład dwumianowy

Dowód dla $n = 2$

Jeżeli ξ_1, ξ_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $B(n_1, p)$ i $B(n_2, p)$, to zmienna losowa $\eta = \xi_1 + \xi_2$ ma rozkład

$$B(n_1 + n_2, p)$$

Rozkład dwumianowy

Dowód dla $n = 2$

Zbiorem wartości zmiennej losowej η jest $\{0, 1, \dots, n_1 + n_2\}$

$$\begin{aligned} P\{\eta = k\} &= P\{\xi_1 + \xi_2 = k\} = P\{\xi_1 = k - \xi_2\} \\ &= \sum_{j=0}^{n_2} P\{\xi_1 = k - j | \xi_2 = j\} P\{\xi_2 = j\} \\ &= \sum_{j=0}^{n_2} P\{\xi_1 = k - j\} P\{\xi_2 = j\} \end{aligned}$$

Rozkład dwumianowy

Dowód dla $n = 2$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^k \binom{n_1}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{n_1-k+j} p^j (1-p)^{n_2-j} \\ &= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{j=0}^k \binom{n_1}{k-j} \binom{n_2}{j} \\ &= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \end{aligned}$$

Dla dowolnego n : zasada indukcji matematycznej

2.3 Rozkład ujemny dwumianowy

Rozkład ujemny dwumianowy

Twierdzenie

Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $NB(r_i, p)$, $i = 1, \dots, n$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład

$$NB\left(\sum_{i=1}^n r_i, p\right)$$

Wniosek

Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są i.i.d. $G(p)$, $i = 1, \dots, n$, to $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i \sim NB(n, p)$

2.4 Rozkład Poissona

Rozkład Poissona

Twierdzenie

Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $Po(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład

$$Po\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

2.5 Rozkład gamma

Rozkład gamma

Twierdzenie

Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $G(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, \dots, n$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład

$$G\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda\right)$$

Wniosek

Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są i.i.d. $E(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$, to $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i \sim G(n, \lambda)$

Rozkład gamma

Dowód dla $n = 2$

Jeżeli ξ_1, ξ_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $G(\alpha_1, \lambda)$ i $G(\alpha_2, \lambda)$, to zmienna losowa $\eta = \xi_1 + \xi_2$ ma rozkład

$$G(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

Rozkład gamma

Dowód dla $n = 2$

Zbiorem wartości zmiennej losowej η jest $(0, \infty)$

$$\begin{aligned} f_\eta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(t-u)f_{\xi_2}(u)du \\ &= \int_0^t \frac{1}{\lambda^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)}(t-u)^{\alpha_1-1}e^{-\frac{t-u}{\lambda}} \frac{1}{\lambda^{\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_2-1}e^{-\frac{u}{\lambda}}du \\ &= \frac{1}{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}e^{-\frac{t}{\lambda}} \int_0^t (t-u)^{\alpha_1-1}u^{\alpha_2-1}du \end{aligned}$$

Rozkład gamma

Dowód dla $n = 2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}t^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{t}{\lambda}} \int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1}u^{\alpha_2-1}du \\ &= \frac{1}{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}t^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{t}{\lambda}} \end{aligned}$$

Dla dowolnego n : zasada indukcji matematycznej

2.6 Rozkład normalny

Rozkład normalny

Twierdzenie

Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład

$$N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

2.7 Rozkład normalny - inne funkcje

Rozkład chi-kwadrat

Twierdzenie

Jeżeli ξ ma rozkład $N(0, 1)$, to ξ^2 ma rozkład chi-kwadrat z jednym stopniem swobody, tzn. ma rozkład $G(1/2, 2)$.

Wniosek

Jeżeli ξ_1, \dots, ξ_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $N(0, 1)$, to $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ma rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody.

Rozkład chi-kwadrat

Formy kwadratowe

Niech ξ ma rozkład $N_n(\mathbf{0}, I)$ oraz niech A będzie macierzą symetryczną rzędu r . Forma kwadratowa

$$\xi^T A \xi$$

ma rozkład chi-kwadrat z r stopniami swobody wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą idempotentną, tzn. $AA = A$.

Rozkład chi-kwadrat

Formy kwadratowe

Niech ξ ma rozkład $N_n(\mu, \Sigma)$ oraz niech A będzie macierzą symetryczną. Forma kwadratowa

$$(\xi - \mu)^T A (\xi - \mu)$$

ma rozkład chi-kwadrat z $\text{tr}(A\Sigma)$ stopniami swobody wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Sigma A \Sigma A \Sigma = \Sigma A \Sigma$$

Rozkład t

Twierdzenie

Jeżeli ξ ma rozkład $N(0, 1)$, η ma rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody, zmienne losowe ξ oraz η są niezależne, to zmienna losowa

$$\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}$$

ma rozkład t z n stopniami swobody.

Rozkład t **Rozkład t**

$$f_{\zeta} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{(1+x^2/n)^{(n+1)/2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E\zeta^{2k-1} = 0 \quad E\zeta^{2k} = \frac{n^k \Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (2k < n)$$

$$D^2\zeta = \begin{cases} \frac{n}{n-2}, & n > 2, \\ \infty, & n \leq 2. \end{cases}$$

Rozkład F **Twierdzenie**

Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład chi–kwadrat z n stopniami swobody, zmienna losowa η ma rozkład chi–kwadrat z m stopniami swobody i zmienne te są niezależne, to zmienna losowa

$$\zeta = \frac{\xi/n}{\eta/m}$$

ma rozkład F z (n, m) stopniami swobody.

Rozkład F **Rozkład F**

$$f_{\zeta}(x) = \frac{n^{n/2}m^{m/2}\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{n/2-1}(m+nx)^{-(n+m)/2}, \quad x > 0.$$

$$E\zeta^k = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - k\right) m^k}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) n^k \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (2k < m)$$

$$D^2\zeta = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \quad (m > 4)$$

3 Twierdzenia graniczne

3.1 Rodzaje zbieżności

Zbieżność prawie na pewno

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zmiennej losowej ξ **prawie na pewno**, jeśli

$$P\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\}\right) = 1$$

Oznaczenie: $\xi_n \xrightarrow{p.n.} \xi$

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zmiennej losowej ξ **według prawdopodobieństwa**, jeśli

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$$

Oznaczenie: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

Zbieżność według rozkładu

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zmiennej losowej ξ **według rozkładu**, jeśli ciąg dystrybuant $(F_{\xi_n})_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do dystrybuanty F_{ξ} w każdym punkcie jej ciągłości

Oznaczenie:

$$\xi_n \xrightarrow{D} \xi$$

$$\xi_n \xrightarrow{p.n.} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{D} \xi$$

3.2 Prawa Wielkich Liczb

Oznaczenia

Oznaczenia

ξ_1, ξ_2, \dots niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie takim, że $E\xi_1 = \mu$,
 $D^2\xi_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$
$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

MPWL

Mocne Prawo Wielkich Liczb

Dla ciągu ξ_1, ξ_2, \dots zachodzi **mocne prawo wielkich liczb**, jeżeli

$$(\forall \varepsilon > 0) P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}_n = \mu\right) = 1$$

Zapis symboliczny

$$\bar{\xi}_n \xrightarrow{p.n.} \mu$$

SPWL

Słabe Prawo Wielkich Liczb

Dla ciągu ξ_1, ξ_2, \dots zachodzi **słabe prawo wielkich liczb**, jeżeli

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{\xi}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Zapis symboliczny

$$\bar{\xi}_n \xrightarrow{P} \mu$$

Metoda Monte-Carlo

Szacowanie liczby π

Niech $\eta \sim U(0, 1)$. Niech $\xi = 4\sqrt{1 - \eta^2}$.

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} 4\sqrt{1 - x^2} f_{\eta}(x) dx \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \\ &= \pi \end{aligned}$$

Metoda Monte-Carlo

Szacowanie liczby π

- Za pomocą komputerowego generatora liczb losowych generujemy n realizacji η_1, \dots, η_n zmiennej losowej η
- Obliczamy ξ_1, \dots, ξ_n .
- Z Prawa Wielkich Liczb: $\bar{\xi}_n \approx \pi$

Nierówności

Nierówność Czebyszewa

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad P\{|\bar{\xi}_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|\xi_1|}{n\varepsilon}$$

Nierówność Czebyszewa-Bienayme

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad P\{|\bar{\xi}_n - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Metoda Monte-Carlo

Szacowanie liczby π

- Jak dużo symulacji, by z dużym prawdopodobieństwem γ błąd był nie większy niż zadane ε ?
- Z nierówności Czebyszewa-Bienayme: $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \leq 1 - \gamma$
- Zatem $n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(1-\gamma)}$

3.3 Centralne Twierdzenie Graniczne

CTG

Centralne Twierdzenie Graniczne

Niech ξ_1, ξ_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, o wartości średniej μ i wariancji $0 < \sigma^2 < \infty$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left\{ \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| = 0$$

Zapis symboliczny

$$\frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0, 1) \quad \text{lub} \quad (S_n)_{n=1}^{\infty} \sim AN(n\mu, n\sigma^2)$$

CTG

Twierdzenie Berry-Esséna'a

Jeżeli ξ_1, ξ_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie oraz $E|\xi_1|^3 < \infty$, to

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left\{ \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \leq C \frac{E|\xi_1 - \mu|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

gdzie $1/\sqrt{2\pi} \leq C < 0.8$.

Rozkład dwumianowy

Twierdzenie de Moivre-Laplace'a

Niech $\zeta_n \sim B(n, p)$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left\{ \frac{\zeta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| = 0$$

Zapis symboliczny

$$\zeta_n \sim AN(np, np(1-p))$$

Rozkład dwumianowy

Twierdzenie Berry-Esséna'a

Niech $\zeta_n \sim B(n, p)$. Wtedy

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left\{ \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \leq C \frac{p^2 + (1-p)^2}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Rozkład dwumianowy

Przybliżenie poissonowskie

Niech $\zeta_n \sim B(n, p)$. Wtedy dla każdego zbioru $M \subseteq \mathbb{N}$ mamy

$$\left| P(\zeta_n \in M) - \sum_{k \in M} \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \right| \leq \frac{(np)^2}{n}$$

Rozkład dwumianowy

Przykład

Niech ξ_1, \dots, ξ_{1000} będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $D(3/8)$.
Obliczyć w przybliżeniu

$$P \left\{ \sum_{i=1}^{1000} \xi_i \leq 400 \right\}$$

Rozkład dwumianowy

Rozwiązanie

Z twierdzeń asymptotycznych wynika, że

$$\sum_{i=1}^{1000} \xi_i \sim AN(1000 \cdot 3/8, 1000 \cdot (3/8) \cdot (5/8))$$

lub

$$\sum_{i=1}^{1000} \xi_i \sim Po(1000 \cdot 3/8)$$

Rozkład dwumianowy

Błąd przybliżenia rozkładem normalnym

(w twierdzeniu Berry-Esséna przyjmujemy $C = 0.8$)

$$0.8 \frac{(3/8)^2 + (5/8)^2}{\sqrt{1000 \cdot (3/8) \cdot (5/8)}} = 0.0276$$

Błąd przybliżenia rozkładem Poissona

$$\frac{(1000 \cdot (3/8))^2}{1000} = 140.7$$

Rozkład dwumianowy

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1000} \xi_i &\sim AN(1000 \cdot 3/8, 1000 \cdot (3/8) \cdot (5/8)) \\ P \left\{ \sum_{i=1}^{1000} \xi_i \leq 400 \right\} \\ &= P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{1000} \xi_i - 1000 \cdot (3/8)}{\sqrt{1000 \cdot (3/8) \cdot (5/8)}} \leq \frac{400 - 1000 \cdot (3/8)}{\sqrt{1000 \cdot (3/8) \cdot (5/8)}} \right\} \\ &\approx \Phi(1.633) \end{aligned}$$

Dystrybuanta empiryczna

Definicja

Niech ξ_1, ξ_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o dystrybuancie F . **Dystrybuantą empiryczną** nazywamy funkcję $F_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ określoną wzorem

$$F_n(x) = \frac{\#\{1 \leq j \leq n : \xi_j \leq x\}}{n}$$

Dystrybuanta empiryczna

MPWL

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

CTG

$$(\forall x \in \mathbb{R}) F_n(x) \sim AN \left(F(x), \frac{F(x)(1 - F(x))}{n} \right)$$