**Zadanie 1.** W urnie znajduje się dziesięć kul białych i dziesięć i czarnych. Wybieramy z urny kolejno bez zwracania po jednej kuli aż do momentu wyciągnięcia po raz pierwszy kuli czarnej. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych kul białych.
**Odp.** 10/11

**Zadanie 2.** W urnie znajduje się 20 kul, w tym 10 kul białych i 10 czarnych. Ciągniemy losowo bez zwracania 18 kul. Niech $N$ oznacza liczbę wyciągniętych kul białych. Obliczyć wariancję zmiennej losowej $N$.
**Odp.** 9/19

**Zadanie 3.** Rzucamy kością do gry dotąd, aż uzyskamy przynajmniej po jednym z sześciu możliwych wyników. Jaka jest wartość oczekiwana liczby rzutów?
**Odp.** 14.7

**Zadanie 4.** Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczym doświadczeniu wynosi $p$, gdzie $p \in (0, 1)$. Powtarzamy doświadczenie aż do momentu, kiedy po raz trzeci nastąpi sukces. Niech $N$ oznacza ilość porażek, które poprzedziły trzeci sukces. Liczba powtórzeń doświadczenia wynosi więc $N + 3$. Przy jakiej wartości parametru $p$ zachodzi: $P(N = 1) = P(N = 2)$?
**Odp.** 0.5

**Zadanie 5.** Niech $N$ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona taką, że $P(N \le 1) = \frac{8}{9}P(N = 2)$. Obliczyć $EN$.
**Odp.** 3

**Zadanie 6.** Zmienna losowa $N$ ma rozkład dany wzorem

$$P(N = k) = \begin{cases} p_0, & \text{dla } k = 0, \\ \frac{1-p_0}{e^{-\lambda}-1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, & \text{dla } k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

gdzie $p_0 \in (0, 1)$ oraz $\lambda > 0$. Obliczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej.
**Odp.** $\lambda(1 - p_0)\frac{e^\lambda}{e^\lambda-1}$

**Zadanie 7.** Zmienna losowa $N$ ma rozkład z geometrycznym ogonem, tzn. rozkład dany wzorem:

$$P(N = k) = \begin{cases} p_0, & \text{dla } k = 0, \\ (1 - p_0)p(1 - p)^{k-1}, & \text{dla } k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

gdzie $p_0 = 0.5$, $p = 0.25$. Obliczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej.
**Odp.** 2

**Zadanie 8.** Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\ln x - \mu)^2\right], & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wiadomo, że $P(X \le q) = 0.6$ oraz $P(X \le r) = 0.4$. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $X$.
**Odp.** $\sqrt{qre}$

**Zadanie 9.** Niech $X$ ma funkcję gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x + 0.5, & \text{dla } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Y = X^2$.
**Odp.** $\frac{1}{2\sqrt{y}}$ dla $y \in (0, 1)$

**Zadanie 10.** Załóżmy, że zmienna losowa $X$ ma rozkład wykładniczy o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby $x$ (czyli największą liczbę całkowitą $n$ taką, że $n \leq x$). Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $N = [X + 0.5]$.
**Odp.** $\frac{e^{0.5\lambda}}{e^{\lambda}-1}$

**Zadanie 11.** Niech $X$ będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$$

Niech $Y = \min\{X, m\}$, gdzie $m > 0$ jest daną liczbą. Wyznaczyć funkcję tworzącą momenty zmiennej $Y$.
**Odp.** $M(t) = \frac{1}{t-1}\left[1 - te^{-m(1-t)}\right]$ dla $t \neq 1$ oraz $M(1) = m + 1$

**Zadanie 12.** Wiadomo, że dla każdej zmiennej losowej $X$ mającej skończone momenty do czwartego rzędu włącznie zachodzi $E(X - EX)^4 \geq \{E(X - EX)^2\}^4$. Pokazać, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $X$ ma rozkład dwupunktowy z prawdopodobieństwem w z każdym punktów równym 0.5.
**Odp.** —

**Zadanie 13.** Na odcinku $(0, 1)$ losujemy punkt zgodnie z rozkładem jednostajnym. W ten sposób odcinek zostaje podzielony na dwa odcinki. Obliczyć wartość oczekiwaną stosunku długości odcinka krótszego do dłuższego.
**Odp.** $\ln 4 - 1$

**Zadanie 14.** Pobieramy osiem niezależnych realizacji jednowymiarowej zmiennej losowej o nieznanym (ale ciągłym) rozkładzie. Po uporządkowaniu zaobserwowanych wartości w ciąg rosnący $\{z_1, \ldots, z_8\}$ tworzymy przedział $(z_2, z_7)$. Z jakim prawdopodobieństwem tak określony przedział pokrywa wartość mediany rozkładu badanej zmiennej losowej?
**Odp.** 119/128

**Zadanie 15.** Niech $U_1, \ldots, U_n$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(a, b)$. Rozważmy zmienne losowe $X = \min\{U_1, \ldots, U_n\}$ oraz $Y = \max\{U_1, \ldots, U_n\}$. Obliczyć współczynnik korelacji liniowej $Corr(X, Y)$.
**Odp.** $1/n$

**Zadanie 16.** Niech $N_1$ i $N_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi odpowiednio $EN_1 = 20$ i $EN_2 = 30$. Obliczyć $Var(N_1 | N_1 + N_2 = 50)$.
**Odp.** 12

**Zadanie 17.** Zmienne losowe $X$ i $Y$ mają łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y+x}, & \text{dla } 0 < x < 1 \text{ i } y > x, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć wartość oczekiwaną $E(X + Y)$.
**Odp.** 2

**Zadanie 18.** Funkcja gęstości dana jest wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x + 2xy + \frac{1}{4}y, & \text{dla } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć $P\left(X > \frac{1}{2} | Y > \frac{1}{2}\right)$.
**Odp.** 5/7

**Zadanie 19.** Funkcja gęstości dana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{dla } (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć $E(X|Y=0.5)$.
**Odp.** 7/12

**Zadanie 20.** Zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne Zmienna losowa $X$ ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Zmienna losowa $Y$ ma rozkład o gęstości

$$g(y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{dla } y > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć $E(X+Y|X \leq 0.5)$.
**Odp.** 4/3

**Zadanie 21.** Zmienne losowe $X$ i $Y$ mają łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y-x)}, & \text{dla } y > x,\ 0 < x < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć $P(Y > \mu(X))$ wiedząc, że $\mu(X) = E(Y|X)$.
**Odp.** $e^{-1}$

**Zadanie 22.** Zmienne losowe $U$ oraz $V$ mają łączną gęstość prawdopodobieństwa

$$f(u,v) = \begin{cases} 4/\pi, & \text{dla } u > 0,\ v > 0 \text{ i } u^2+v^2 \leq 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $X = \frac{U^2}{U^2+V^2}$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $X$.
**Odp.** $g(x) = 2x$, dla $0 < x < 1$

**Zadanie 23.** Rozpatrzmy zmienne losowe $X$ i $Y$ o łącznym rozkładzie normalnym. Wiadomo, że $VarY = 9$, $E(Y|X) = \frac{1}{2}X + 7$, $Var(Y|X) = 8$. Wyznaczyć $Cov(Y|X)$.
**Odp.** 2

**Zadanie 24.** Zmienna losowa $X$ ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 5. Zmienna losowa $Y$ ma rozkład jednostajny na pewnym odcinku, przy czym jej oczekiwana wynosi 5, a wariancja wynosi 25/3. Zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne. Obliczyć $P(X+Y<6)$.
**Odp.** $0.1 + 0.5e^{-1.2}$

**Zadanie 25.** Zmienna losowa $X$ ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 0.5. Niezależna zmienna losowa $Y$ ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2. Obliczyć $E(X|X+Y=5)$.
**Odp.** 0.66

**Zadanie 26.** Rozkład warunkowy zmiennej $S$ (równej $X_1 + \cdots + X_N$) przy danym $\Lambda = \lambda$ jest złożonym rozkładem Poissona z parametrem $\lambda$ oraz z rozkładem wykładniczym składnika sumy $(X_i)$ o wartości oczekiwanej 2. Rozkład brzegowy zmiennej $\Lambda$ dany jest funkcją prawdopodobieństwa $P(\Lambda = 1) = 0.75$, $P(\Lambda = 2) = 0.25$. Wyznaczyć wariancję rozkładu bezwarunkowego zmiennej $S$.
**Odp.** $10\frac{3}{4}$

**Zadanie 27.** Zmienna losowa $Y$ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$, natomiast zależna od niej zmienna $X$ ma rozkład warunkowy (przy danej wartości $Y=y$) jednostajny na przedziale $(0,y)$. Obliczyć prawdopodobieństwo (bezwarunkowe) $P(X<0.5)$.
**Odp.** 0.847

**Zadanie 28.** Niech $X$ i $Y$ będą zmiennymi losowymi takimi, że $X$ ma gęstość

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & \text{dla } x>0,\\ 0, & \text{poza tym,}\end{cases}$$

oraz $P(Y=k|X=x)=\frac{x^k}{k!}e^{-x}$ dla $k=0,1,2,\ldots$ Udowodnić, że zmienne losowe $X$ i $Y-X$ są nieskorelowane.
**Odp.** —

**Zadanie 29.** Zmienne losowe $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ są niezależne i mają jednakowy wykładniczy rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & \text{dla } x>0,\\ 0, & \text{poza tym.}\end{cases}$$

Zmienna losowa $N$ jest niezależna od nich i ma rozkład geometryczny

$$P(N=k)=(1-q)q^k, \qquad k=0,1,\ldots$$

Niech $S=\sum_{i=1}^{N}X_i$ będzie sumą losowej liczby zmiennych losowych (przyjmujemy, że $S=0$, gdy $N=0$). Udowodnić, że $Var(N|S=s)=E(N|S=s)-1$.
**Odp.** —

**Zadanie 30.** Niech $X_0,X_1,\ldots,X_n,\ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$. Zmienna losowa $N$ oznacza numer pierwszej ze zmiennych $X_1,\ldots,X_n,\ldots$, która jest większa od $X_0$: $N=\min\{k: X_k>X_0\}$. Obliczyć $E(X_N-X_0)$.
**Odp.** 1/4

**Zadanie 31.** Zmienna losowa $X$ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,2)$, a zmienna losowa $Y$ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Zmienne są niezależne. Obliczyć $P(|2Y-X|<0.5)$.
**Odp.** 9/16

**Zadanie 32.** Niech $X_1$ i $X_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$. Rozważmy zmienną losową równą bezwzględnej wartości różnicy zmiennych $X_1$ i $X_2$. Obliczyć wartość oczekiwaną $\mu$ i wariancję $\sigma^2$ tej zmiennej losowej.
**Odp.** $\mu=1/3$, $\sigma^2=1/18$

**Zadanie 33.** Zmienne losowe $U$ oraz $V$ są niezależne i mają identyczny rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$. Niech $X=\cos(2\pi U)f(V)$ oraz $Y=\sin(2\pi U)f(V)$. Dla jakiej funkcji $f$ zmienne $X$ i $Y$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $N(0,1)$?
**Odp.** $f(x)=-2\ln x$

**Zadanie 34.** $X_1,\ldots,X_{10}$ jest prostą próbą losową z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej 5. Wiadomo, że $P(\max\{X_1,\ldots,X_{10}\}\le x)=0.95$. Obliczyć $x$.
**Odp.** 26.377

**Zadanie 35.** Zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne. Zmienna losowa $X$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 0.5. Zmienna losowa $Y$ ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1. Obliczyć $P(Y>X^2)$.
**Odp.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Zadanie 36.** Zmienna losowa $(X_1, X_2, X_3)$ ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $(0,0,0)$ i macierzą kowariancji $\begin{bmatrix} 4 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$. Występująca w równaniu $X_1 = aX_2 + bX_3 + E$ zmienna losowa $E$ jest nieskorelowana ze zmiennymi losowymi $(X_2, X_3)$. Wyznaczyć stałą $a$.
**Odp.** $4/3$

**Zadanie 37.** Zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, X_4$ są niezależne i mają jednakowy rozkład normalny $N(0, \sigma^2)$. Obliczyć $P(X_1^2 - 5X_2^2 < 5X_3^2 - X_4^2)$.
**Odp.** $5/6$

**Zadanie 38.** Zakładamy, że $X_1, \ldots, X_{20}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$. Niech $Y = X_1 + \cdots + X_{15}$ i $Z = X_6 + \cdots + X_{20}$. Obliczyć $E(Z|Y)$.
**Odp.** $\frac{2}{3}Y + 5\mu$

**Zadanie 39.** Zmienne losowe $X_1, X_2$ i $X_3$ mają łączny rozkład normalny taki, że $EX_i = 0$, $VarX_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3$. Załóżmy, że $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_3) = Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = 0$. Udowodnić, że $P(X_1 = -X_3) = 1$.
**Odp.** —

**Zadanie 40.** $X_1, \ldots, X_{20}$ jest próbą losową z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 10 i wariancji 0.01. Wyznaczyć $a$ takie, że $P(\max\{X_1, \ldots, X_{20}\} \leq a) = 0.99$.
**Odp.** 10.329

**Zadanie 41.** Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną zero i wariancją jeden. Niech $S = (X_1 + \cdots + X_n)^2$. Obliczyć wariancję zmiennej losowej $S$.
**Odp.** $2n^2$

**Zadanie 42.** Mieliśmy próbę prostą $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ z rozkładu normalnego dwuwymiarowego o nieznanych parametrach:

$$EX_i = EY_i = \mu, \quad VarX_i = VarY_i = \sigma^2, \quad Cov(X_i, Y_i) = \varrho\sigma^2.$$

Niestety, obserwacje na iksach i igrekach zostały oddzielone, igreki pomieszane, po czym zagubiliśmy informacje o przynależności do par. Możemy to sformalizować przyjmując, iż mamy nadal niezmieniony ciąg iksów oraz ciąg $Z_1, \ldots, Z_n$ stanowiący losową permutację ciągu $Y_1, \ldots, Y_n$. Obliczyć $Cov(X_i, Z_i)$.
**Odp.** $\varrho\sigma^2/n$

**Zadanie 43.** Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką $n$ niezależnych realizacji zmiennej losowej $X$. Niech $X_{\max}^{(n)}$ oraz $X_{\min}^{(n)}$ oznaczają odpowiednio największą i najmniejszą z liczb $X_1, \ldots, X_n$. Rozważmy przypadek próbek dwuelementowych oraz trójelementowych. Pokazać, że zależność

$$E(X_{\max}^{(3)} - X_{\min}^{(3)}) = \frac{3}{2}E(X_{\max}^{(2)} - X_{\min}^{(2)})$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa $X$ ma skończoną wartość oczekiwaną.
**Odp.** —

**Zadanie 44.** Zmienna losowa $X$ ma rozkład warunkowy dany gęstością:

$$f_{X|\Lambda=\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Natomiast rozkład brzegowy zmiennej losowej $\lambda$ dany jest gęstością:

$$f_\Lambda(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech parametry drugiego z rozkładów wynoszą $\alpha = 2$, $\beta = 2$. Wyznaczyć medianę rozkładu bezwarunkowego zmiennej $X$.
**Odp.** 0.828

**Zadanie 45.** Mamy dwie niezależne zmienne losowe $X$ oraz $Y$. Jedna nich (nie wiadomo która) ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1, druga zaś ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2. Obliczyć wartość ilorazu

$$\frac{E \max\{X, Y\}}{E \min\{X, Y\}.}$$

**Odp.** 3.5

**Zadanie 46.** Mamy dwie niezależne zmienne losowe $X$ oraz $Y$. Zmienna $X$ ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1, zmienna $Y$ zaś ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2. Zdefiniujmy nową zmienną $Z$ jako udział zmiennej $X$ w sumie obu zmiennych: $Z = \frac{X}{X+Y}$. Obliczyć medianę zmiennej losowej $Z$.
**Odp.** 1/3

**Zadanie 47.** Niech dwuwymiarowa zmienna losowa ma gęstość:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & \text{dla } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo

$$P\left((X, Y) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right).$$

**Odp.** 1/8

**Zadanie 48.** Zmienna $X$ ma rozkład o gęstości $f(x) = 0.5x^2 e^{-x}$ określonej na przedziale $(0, \infty)$. Zmienna losowa $Y$ ma rozkład o gęstości $g(y) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{(y-3)^2}{6}\right)$ określonej na całej osi liczb rzeczywistych. Kowariancja tych zmiennych wynosi $-3$. Obliczyć wariancję $Var(X + Y)$.
**Odp.** podane informacje są sprzeczne

**Zadanie 49.** Załóżmy, że niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, X_3, X_4$ mają rozkłady wykładnicze o wartościach oczekiwanych odpowiednio 1, 2, 3 i 4. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\})$.
**Odp.** 0.48

**Zadanie 50.** O zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o tej samej wartości oczekiwanej równej $\mu$ oraz tej samej wariancji $\sigma^2$ zakładamy, że $Cov(X_i, X_j) = \varrho\sigma^2$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych $X_1, \ldots, X_n$ i mają rozkłady prawdopodobieństwa $P(\varepsilon_i = -1) = P(\varepsilon_i = 1) = 0.5$. Obliczyć wariancję zmiennej losowej $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i$.
**Odp.** $n(\mu^2 + \sigma^2)$

**Zadanie 51.** Jabłko upada od jabłoni w odległości, która jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości $f(x) = 2e^{-2x}$ (pomijamy średnicę pnia i średnicę jabłka). Jabłko może spadać w każdym kierunku z tym samym prawdopodobieństwem. Jaka jest wartość oczekiwana odległości dwóch jabłek, które spadły niezależnie pod warunkiem, że obydwa upadły w tej samej odległości od jabłoni?
**Odp.** 0.637

**Zadanie 52.** Macierz kowariancji wektora losowego $(X_1, \ldots, X_n)$ jest postaci $\sigma^2((1-\varrho)I + \varrho E)$, gdzie macierze $I$ oraz $E$ to, odpowiednio, macierz jednostkowa i macierz złożona z samych jedynek, a obie są wymiarów $n \times n$. Zakładamy, że macierz jest rzędu $n$. Jaki jest dopuszczalny zakres wartości parametru $\varrho$?
**Odp.** $\left(\frac{1}{n-1}, 1\right)$

**Zadanie 53.** Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_5, X_6, \ldots, X_{20}$ są niezależne, o jednakowym rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$. Niech $S_5 = X_1 + \cdots + X_5$, $S_{20} = X_1 + \cdots + X_{20}$. Wyznaczyć warunkową wartość oczekiwaną $E(S_5|S_{20})$.
**Odp.** $\frac{1}{16}S_{20}^2 + \frac{15}{4}\sigma^2$

**Zadanie 54.** Niech $X$ będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą $x$ (największą liczbę całkowitą $n$ taką, że $n \leq x$), $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$ część ułamkową liczby $x$. Obliczyć współczynnik korelacji liniowej $Corr(\langle x \rangle, \lfloor x \rfloor)$.
**Odp.** 0

**Zadanie 55.** Niezależne zmienne losowe $X, Y$ mają identyczny rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $\mu$. Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną $E[\min\{X, Y\}|X + Y = M]$, gdzie $M$ jest pewną dodatnią liczbą.
**Odp.** $0.25M$

**Zadanie 56.** Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie jednostajnym na pewnym przedziale $(\theta_1, \theta_2)$, Obliczyć współczynnik korelacji $Corr(\min_i\{X_i\}, \max_i\{X_i\})$.
**Odp.** $1/n$

**Zadanie 57.** Ciągła zmienna losowa $X$ ma gęstość $f$ i dystrybuantę $F$ takie, że $f(x)$ jest ciągła dla $x > 1$, $F(1) = 0$, $\frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{1}{x}$ dla $x > 1$. Obliczyć $P(X > 2)$.
**Odp.** 0.5

**Zadanie 58.** Wiadomo, że zmienna losowa $X$ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$, zaś $Y$ ma rozkład dyskretny $P(Y = 1) = P(Y = -1) = 0.5$. Niech $\varrho$ będzie współczynnikiem korelacji między zmiennymi $X$ i $Y$. Jakie są dopuszczalne wartości współczynnika $\varrho$?
**Odp.** $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

**Zadanie 59.** Łączny rozkład zmiennych losowych $X$ i $Y$ ma gęstość:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y+x}, & \text{dla } 0 < x < 1 \text{ i } y > x, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć $VarY$
**Odp.** 13/12

**Zadanie 60.** W ciągu 20 rzutów monetą liczymy serie pięciu orłów. Każdy ciąg sąsiadujących ze sobą pięciu orłów uznajemy za serię. Przyjmujemy zatem, że serie mogą „zachodzić na siebie", na przykład w ciągu

| Nr rzutu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wynik | $R$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $R$ | $O$ | $O$ | $O$ | $R$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $R$ | $R$ |

mamy cztery serie, zaczynające się od miejsc 2, 3, 4 i 14. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby serii pięciu orłów w 20 rzutach.
**Odp.** 0.5

**Zadanie 61.** Na okręgu o obwodzie 1 wybieramy punkt $X_0$, a następnie losowo i niezależnie wybieramy punkty $X_1, \ldots, X_n$. Niech $Y$ oznacza odległość od $X_0$ do najbliższego spośród punktów $X_1, \ldots, X_n$ liczoną wzdłuż okręgu. Obliczyć $EY$.
**Odp.** $\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$

**Zadanie 62.** Niech $X$ i $Y$ będą zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie normalnym takim, że $EX = EY = 0$, $VarX = 1$, $VarY = 5$, $Cov(X,Y) = -2$. Obliczyć $E(Y^2|X = x)$.
**Odp.** $1 + 4x^2$

**Zadanie 63.** Załóżmy, że $X$, $Y$ i $Z$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Znaleźć liczbę $a$ taką, że

$$P\left(\frac{|X|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \leq a\right) = 0.6.$$

**Odp.** 0.6

**Zadanie 64.** Załóżmy, że $X_1, X_2, X_3$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Niech $S = X_1 + X_2 + X_3$. Obliczyć $P(X_1 > S/2 \text{ lub } X_2 > S/2 \text{ lub } X_3 > S/2)$.
**Odp.** 3/4

**Zadanie 65.** Na okręgu o promieniu 1 wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty. Obliczyć wartość oczekiwaną odległości między nimi (odległość mierzymy wzdłuż cięciwy).
**Odp.** $4/\pi$

**Zadanie 66.** Rozważamy kolektywny model ryzyk. Zakładamy, że $S = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$, gdzie $N$ oraz $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym $N$ ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną $\lambda$, zaś każda ze zmiennych $X_n$ ma rozkład taki, że $P(X_n = 1) = \frac{2}{3} = 1 - P(X_n = 2)$. Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną $E(N|S = 3)$.
**Odp.** $6\frac{\lambda+3}{2\lambda+9}$

**Zadanie 67.** Załóżmy, że $X_0$ oraz $W_1, \ldots, W_{10}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy tym każda ze zmiennych $W_1, \ldots, W_{10}$ ma jednakowy rozkład normalny $N(5,1)$. Niech

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n + W_{n+1}, \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, \ldots, 9.$$

Wiadomo, że zmienne losowe $X_0$ i $X_{10}$ mają rozkład normalny o jednakowych parametrach. Wyznaczyć parametry tego rozkładu.
**Odp.** wartość oczekiwana 10.4, wariancja 4/3

**Zadanie 68.** Rzucamy dziesięć razy monetą. Niech $K_5$ oznacza liczbę orłów w pierwszych pięciu rzutach, zaś $K_{10}$ liczbę orłów we wszystkich dziesięciu rzutach. Obliczyć $EVar(K_5|K_{10})$.
**Odp.** 0.625

**Zadanie 69.** W umie znajduje się dziesięć kul, ponumerowanych liczbami $1, 2, \ldots, 10$. Losujemy ze zwracaniem czterokrotnie po jednej kuli. Niech $S$ oznacza sumę numerów wylosowanych kul. Umawiamy się przy tym, że każdy wylosowany numer występuje w sumie tylko raz, (np. jeśli wylosowaliśmy kule o numerach $3, 1, 5, 3$, to $S = 3 + 1 + 5 = 9$). Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $S$.
**Odp.** 18.9145

**Zadanie 70.** Wiadomo, że zmienna losowa $X$ ma wykładniczy rozkład prawdopodobieństwa o gęstości $f(x) = e^{-x}$ $(x > 0)$, zaś $Y$ jest taką zmienną losową, że dla każdego $x > 0$, $E(Y|X > x) = x + 2$, oraz iż moment drugiego rzędu zmiennej $Y$ istnieje i jest liczbą skończoną. Obliczyć $Cov(X, Y)$ i $Corr(X, Y)$.
**Odp.** $Cov(X, Y) = 1$, podane informacje nie wystarczają do obliczenia współczynnika korelacji

**Zadanie 71.** Załóżmy, że $X_1, X_2, X_3$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną 5. Obliczyć $Var(X_2 + X_3|X_1 + X_2 = 5)$.
**Odp.** 6.25

**Zadanie 72.** Zmienna losowa $X$ ma rozkład wykładniczy o gęstości $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$. Dla dowolnej liczby $a$ niech $\lfloor a \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż $a$ oraz $\langle a \rangle = a - \lfloor a \rfloor$ oznacza część ułamkową liczby $a$. Obliczyć $E\langle X \rangle$ w zależności od $c = E(\lfloor X \rfloor)$.
**Odp.** $(\ln(c + 1) - \ln c)^{-1} - c$

**Zadanie 73.** Niech $X_1, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa $P(X_i = 1) = 2/3 = 1 - P(X_i = -1)$. Niech $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ dla $k = 1, \ldots, 10$. Obliczyć $P(S_{10} = 2 \text{ i } S_1 \leq 5, S_2 \leq 5, \ldots, S_9 \leq 5)$.
**Odp.** 0.2265

**Zadanie 74.** Niech $X = N \exp(tZ)$, gdzie $N$ jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda$, $Z$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$, niezależną od $N$, $t$ jest stałą. Obliczyć $\frac{VarX}{(EX)^2}$.
**Odp.** $\frac{1}{\lambda} \exp(\sigma^2 t^2) + \exp(\sigma^2 t^2) - 1$

**Zadanie 75.** Wiemy, że $Y = 2X + W$, gdzie $X$ i $W$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, $X$ ma rozkład normalny $N(0, 9)$, a $W$ ma rozkład normalny $N(0, 4)$. Dla jakiego $a$ zachodzi związek $X = aY + U$ i zmienne $Y$ i $U$ są niezależne.
**Odp.** 9/20

**Zadanie 76.** Niech $K$ będzie zmienną losową taką, że $P(K = k) = 0.1$ dla $k = 1, \ldots, 10$. Niech

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{gdy } K = k, \\ 0, & \text{gdy } K \neq k, \end{cases} \qquad S_5 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5.$$

Obliczyć $Cov(X_1, S_5)$.
**Odp.** 1/20

**Zadanie 77.** Załóżmy, że zmienne losowe $X$ i $Y$ mają łączny rozkład normalny, $EX = EY = 0$, $VarX = VarY = 1$ i $Cov(X, Y) = \varrho$. Obliczyć $Cov(X^2, Y^2)$.
**Odp.** $2\varrho^2$

**Zadanie 78.** Niech $N_1 = \sum_{i=1}^{N} X_i$ i $N_0 = N - N_1$, gdzie $N$ jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda$, zaś $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są zmiennymi losowymi niezależnymi od $N$ i od siebie nawzajem. Zakładamy, że każda ze zmiennych $X_i$ ma rozkład Bemoulliego: $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0)$, gdzie $0 < p < 1$. Obliczyć $E\left[\frac{N_1}{N_0+1}\right]$.
**Odp.** $\frac{p}{1-p}(1 - e^{-\lambda})$

**Zadanie 79.** Załóżmy, że $W_1, \ldots, W_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, $E(W_n) = 1/\lambda$. Niech $T_0 = 0$ i $T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Załóżmy, że $Y$ jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, $EY = 1/\alpha$ i niezależną od zmiennych $W_i$. Niech $N = \max\{n \geq 0 : T_n \leq Y\}$. Podać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $N$.
**Odp.** $P(N = n) = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

**Zadanie 80.** Zmienne losowe $N$ i $X$ są niezależne i mają następujące rozkłady prawdopodobieństwa: $P(N = n) = 2^{-n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$, $P(X > x) = 2^{-x}$ dla $x > 0$. Obliczyć $P(X > N)$.
**Odp.** $1/3$

**Zadanie 81.** Z odcinka $[0, 1]$ wybieramy losowo punkt $X_1$. Następnie z odcinka $[0, X_1]$ wybieramy losowo punkt $X_2$, z odcinka $[0, X_2]$ - punkt $X_3$ i tak dalej. Obliczyć współczynnik zmienności otrzymanego w $n$-tym kroku punktu $X_n$, czyli $\frac{\sqrt{VarX_n}}{EX_n}$.
**Odp.** $\sqrt{(4/3)^n - 1}$

**Zadanie 82.** W urnie znajduje się 20 kul, na każdej z nich narysowana jest litera i cyfra. Mamy osiem kul oznaczonych $A1$, cztery kule oznaczone $A2$, sześć kul oznaczonych $B1$ i dwie kule oznaczone $B2$. Losujemy bez zwracania dziesięć kul. Niech $N_A$ oznacza liczbę wylosowanych kul oznaczonych literą $A$, zaś $N_1$ - liczbę wylosowanych kul oznaczonych cyfrą 1. Obliczyć $E(N_1|N_A)$.
**Odp.** $-\frac{1}{12}N_A + \frac{15}{2}$

**Zadanie 83.** O zmiennych losowych $X$ i $Y$ wiemy, że $0 \leq Y < X$, $P(X = 0) = 0$, $E(Y|X) = \frac{X}{2}$ i $VarY = \frac{1}{2}VarX + \frac{1}{4}(EX)^2$. Pokazać, że $P(Y = X) = 0.5$.
**Odp.** —

**Zadanie 84.** O zmiennych losowych $X_0$ i $X_1$ zakładamy, że $EX_0 = EX_1 = 0$, $VarX_0 = VarX_1 = 1$ i $Cov(X_0, X_1) = \varrho$, gdzie $0 < \varrho < 1$. Niech $X_1 = \varrho X_0 + W$. Rozważmy zmienne losowe postaci $\hat{W} = zX_1 + (1 - z)X_0$ interpretowane jako predyktory nieobserwowanej zmiennej $W$. Znaleźć współczynnik $z_*$, dla którego błąd średniokwadratowy $E(\hat{W} - W)^2$ jest minimalny.
**Odp.** $1 + \frac{\varrho}{2}$

**Zadanie 85.** Wykonujemy rzuty monetą aż do otrzymania po raz pierwszy sekwencji dwóch jednakowych wyników (tj. $OO$ lub $RR$) w dwóch kolejnych rzutach. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.
**Odp.** 3

**Zadanie 86.** Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy wykładniczy rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Zmienne losowe $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots$ określamy wzorem

$$\bar{X}_i = \begin{cases} X_i - aEX_i, & \text{gdy } X_i > aEX_i, \\ 0, & \text{gdy } X_i \leq aEX_i. \end{cases}$$

Zmienna losowa $N$ ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda$ i jest niezależna od $X_1, X_2, \ldots$ Niech $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ oraz $\bar{S} = \sum_{i=1}^{N} \bar{X}_i$. Dobrać liczbę $a$ tak, żeby $Var\bar{S} = 0.36VarS$.
**Odp.** 1.0217

**Zadanie 87.** W urnie znajdują się kule, z których każda oznaczona jest jedną z liter alfabetu: 10 kul oznaczonych literą $A$, 20 kul oznaczonych literą $B$, 30 kul oznaczonych literą $C$ i $x$ kul oznaczonych innymi literami alfabetu. Losujemy ze zwracaniem siedem razy po jednej kuli z urny. Zmienne losowe $N_A$, $N_B$, $N_C$ oznaczają odpowiednio liczbę tych ciągnięć, w których pojawiła się litera $A$, $B$, $C$. Jakie musi być $x$, aby zmienne losowe $N_A + N_B$ oraz $N_B + N_C$ były nieskorelowane?
**Odp.** 15

**Zadanie 88.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$, zaś $N$ jest zmienną o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda$, niezależną od $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ Niech

$$M = \begin{cases} \max\{X_1, \ldots, X_n\}, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $EM$.
**Odp.** $1 - \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

**Zadanie 89.** Załóżmy, że $W_1, W_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, $EW_n = 1/\lambda$, $n = 1, 2$. Niech $X = \min\{W_1, W_2\}$. Obliczyć $E(W_1|X)$.
**Odp.** $X + \frac{1}{2\lambda}$

**Zadanie 90.** Załóżmy, że $X_1, \ldots X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Niech $\bar{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$ oraz $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Obliczyć

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_m)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}\right].$$

**Odp.** $\frac{m-1}{n-1}$

**Zadanie 91.** W urnie znajduje się 25 kul, z których $m = 15$ jest białych, $r - m = 10$ czarnych. Losujemy bez zwracania najpierw $n_1 = 6$ kul, a następnie spośród pozostałych w urnie, losujemy bez zwracania $n_2 = 8$ kul. Niech $S_1$ oznacza liczbę białych kul wybranych w pierwszym losowaniu, a $S_2$ oznacza liczbę białych kul wybranych w drugim losowaniu. Obliczyć $Cov(S_1, S_2)$.
**Odp.** $-0.48$

**Zadanie 92.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są dodatnimi, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa. Niech $R_0 = 0$ i $R_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ dla $n > 0$. Zmienne losowe $N$ i $M$ są od siebie niezależne i niezależne od $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ Wiadomo, że obie te zmienne mają rozkłady Poissona, $EN = \lambda$ i $EM = \mu$. Obliczyć $P(R_{N+M} > R_N)$.
**Odp.** $\frac{\mu}{\lambda+\mu}[1 - e^{-\lambda-\mu}]$

**Zadanie 93.** Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne, mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, $EX_i = \mu$, $VarX_i = \sigma^2$. Niech $N$ będzie zmienną losową niezależną od ciągu $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ o rozkładzie prawdopodobieństwa danym wzorem

$$P(N = n) = n(1-\theta)^{n-1}\theta^2 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Obliczyć $Var\left(\frac{S_N}{N}\right)$.
**Odp.** $\theta\sigma^2$

**Zadanie 94.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n$ i $Y_1, \ldots, Y_m$ są dwiema niezależnymi próbkami z tego samego rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Niech $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ oraz $\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i$. Obliczyć $P(|\bar{X} - \mu| > |\bar{Y} - \mu|)$ dla $n = 100$ i $m = 385$.
**Odp.** 0.70

**Zadanie 95.** Załóżmy, że dla danej wartości $\Theta = \theta$ zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są warunkowo niezależne i mają dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa $P(X_i = 1|\theta) = \theta = 1 - P(X_i = 0|\theta)$. Zmienna losowa $\Theta$ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Niech $N = \min\{n : X_n = 1\}$. Obliczyć $P(N = n + 1|N > n)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$
**Odp.** $\frac{1}{n+2}$

**Zadanie 96.** Rozważmy następującą, uproszczoną wersję gry w „wojnę". Talia składa się z 52 kart. Dobrze potasowane karty rozdajemy dwóm graczom, każdemu po 26 i układamy w dwie kupki. Gracze wykładają kolejno po jednej karcie z wierzchu swojej kupki i sprawdzają wysokość obu kart. Jeśli obie wyłożone karty są równej wysokości (dwa asy lub dwa króle itd.) to mówimy, że następuje wojna. Po sprawdzeniu, obie karty odkładamy na bok i nie biorą już one udziału w dalszej grze. Powtarzamy tę procedurę 26 razy; gra kończy się, gdy obaj gracze wyłożą wszystkie karty. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wojen.
**Odp.** 26/17

**Zadanie 97.** Niech $W_1, W_2, W_3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(w) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda w}, & \text{dla } w > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć medianę zmiennej losowej $\frac{W_1}{W_2+W_3}$.
**Odp.** $\sqrt{2}/2$

**Zadanie 98.** Wiemy, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_n$ są niezależne i mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa. Zakładamy, że $1 < m < n$ i znamy $Var(X_i) = \sigma^2$. Niech $S_m = X_1 + \cdots + X_m$ i $S_n = X_1 + \cdots + X_m + \cdots + X_n$. Obliczyć $EVar(S_m|S_n)$.
**Odp.** $m\frac{n-m}{n}\sigma^2$

**Zadanie 99.** Załóżmy, że $X, Y$ są zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie normalnym, $EX = EY = 0$, $VarX = VarY = 1$ i $Cov(X, Y) = \varrho$. Obliczyć $Var(XY)$.
**Odp.** $1 + \varrho^2$

**Zadanie 100.** W urnie znajduje się 25 kul, z których 15 jest białych i 10 czarnych. Losujemy bez zwracania kolejno po jednej kuli. Kończymy losowanie w momencie, kiedy wyciągnięte zostaną wszystkie czarne kule. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby pozostałych w urnie białych kul.
**Odp.** 15/11

**Zadanie 101.** Wektor losowy $(X, Y)$ ma łączną gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{dla } x > 0,\ y > 0,\ 4x + y < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Podać gęstość $g(z)$ rozkładu zmiennej losowej $Z = \frac{X}{X+Y}$.
**Odp.** $g(z) = 1$ dla $0 < z < 1$

**Zadanie 102.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym, ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa, mającymi momenty rzędu 1, 2 i 3. Znamy $\mu = EX_i$ i $\sigma^2 = VarX_i$. Niech $f(x)$ oznacza gęstość rozkładu pojedynczej zmiennej $X_i$. Wiemy, że rozkład jest symetryczny w tym sensie, że $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ dla każdego $x$. Obliczyć trzeci moment sumy: $ES_n^3$, gdzie $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
**Odp.** $n^2\mu(n\mu^2 + 3\sigma^2)$

**Zadanie 103.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\mu} \exp(-x/\mu) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Zmienna losowa $N$ jest niezależna od $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda$. Niech $c$ będzie ustaloną liczbą dodatnią,

$$Y_i = \min\{X_i, c\}, \;\; Z_i = X_i - Y_i, \;\; S^{(Y)} = \sum_{i=1}^{N} Y_i, \;\; S^{(Z)} = \sum_{i=1}^{N} Z_i.$$

Obliczyć $Cov(S^{(Y)}, S^{(Z)})$.
**Odp.** $c\mu\lambda e^{-c/\mu}$

**Zadanie 104.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_m, \ldots$ jest ciągiem niezależnych, dodatnich zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = x \exp(-x) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Niech $S_0 = 0$ i $S_m = X_1 + \cdot + X_m$ dla $m > 0$. Określmy zmienną losową $M = \max\{m \geq 0 : S_m \leq 5\}$. Obliczyć $P(M = 2)$.
**Odp.** $5e^{-5}$

**Zadanie 105.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\mu} \exp(-x/\mu) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Zmienna losowa $N$ jest niezależna od $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ i ma rozkład geometryczny dany wzorem:

$$P(N = n) = p(1-p)^n \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Niech $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (przy tym $S_0 = 0$, zgodnie z konwencją). Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(N = 1 | S_N = s)$ dla $s > 0$.
**Odp.** $\exp[-s(1-p)/\mu]$

**Zadanie 106.** Rozważmy następujący model strzelania do tarczy. Współrzędne punktu trafienia $(X, Y)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$. Punkt $(0, 0)$ uznajemy za środek tarczy, więc $\sqrt{X^2 + Y^2}$ jest odległością od środka. Obliczyć wartość oczekiwaną odległości od środka najlepszego z $n$ strzałów $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, czyli

$$E \min\left\{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}, \ldots, \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}\right\}.$$

**Odp.** $\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2n}}$

**Zadanie 107.** W urnie znajduje się 10 kul Amarantowych, 10 kul Białych i 10 kul Czarnych. Losujemy bez zwracania 12 kul. Niech $A$ oznacza liczbę wylosowanych kul Amarantowych, $B$ oznacza liczbę wylosowanych kul Białych, $C$ oznacza liczbę wylosowanych kul Czarnych. Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych losowych $A$ i $B$. (Wskazówka: $Var(A + B + C) = 0$.)
**Odp.** $-1/2$

**Zadanie 108.** Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $N$ będzie zmienną losową niezależną od $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda$. Niech

$$Y = \begin{cases} \min\{X_1, \ldots, X_n\}, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $E(N|Y = y)$ przy założeniu, że $y > 0$.
**Odp.** $1 + \lambda e^{-\alpha y}$

**Zadanie 109.** W loterii bierze udział 10 osób. Regulamin loterii faworyzuje te osoby, które w eliminacjach osiągnęły lepsze wyniki: zwycięzca eliminacji, nazywany graczem nr. 1 otrzymuje 10 losów; osoba, która zajęła drugie miejsce w eliminacjach, nazywana graczem nr. 2, otrzymuje 9 losów; osoba, która zajęła trzecie miejsce w eliminacjach, nazywana graczem nr. 3, otrzymuje 8 losów,. . .,osoba, która zajęła dziesiąte miejsce w eliminacjach, nazywana graczem nr. 10, otrzymuje 1 los. Jeden spośród 55 losów przynosi wygraną. Obliczyć wartość oczekiwaną numeru gracza, który posiada wygrywający los.
**Odp.** 4

**Zadanie 110.** Niech zmienna losowa $S_n$ będzie liczbą sukcesów w $n$ próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p$. O zdarzeniu losowym $A$ wiemy, że

$$P(A|S_n = k) = a\frac{k}{n} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

gdzie $a$ jest znaną liczbą, $0 < a \leq 1$. Obliczyć $E(S_n|A)$.
**Odp.** $pn + 1 - p$

**Zadanie 111.** Rozważmy sumę losowej liczby zmiennych losowych $S = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Przyjmijmy typowe dla kolektywnego modelu ryzyka założenia: składniki $X_i$ mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, są niezależne od siebie nawzajem i od zmiennej losowej $N$. Przyjmijmy oznaczenia:

$$EX_i = \mu, \ VarX_i = \sigma^2, \ EN = m, \ VarN = d^2.$$

Podać współczynniki $a_*$, $b_*$ funkcji liniowej $a_*S + b_*$, która najlepiej przybliża zmienną losową $N$ w sensie średniokwadratowym:

$$E(a_*S + b_* - N)^2 = \min_{a,b} E(aS + b - N)^2.$$

**Odp.** $a_* = \frac{\mu d^2}{\mu^2 d^2 + m\sigma^2}$, $b_* = \frac{m^2\sigma^2}{\mu^2 d^2 + m\sigma^2}$

**Zadanie 112.** Niech $X$ i $Y$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy tym, $EX = EY = 0$, $VarX = 1$, $VarY = 3$. Obliczyć $P(|X| < |Y|)$.
**Odp.** 0.6667

**Zadanie 113.** Rozważmy niezależne zmienne losowe $W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots$ o jednakowym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną $\mu$. Niech $N$ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $\lambda$, niezależną od $W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots$ Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y = \min\{W_0, W_1, \ldots, W_N\}$.
**Odp.** $1 - \exp\left[\lambda(e^{-y/\mu} - 1) - y/\mu\right]$

**Zadanie 114.** Załóżmy, że $U_0, U_1, \ldots, U_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$. Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną $E(\max\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}|U_0)$.
**Odp.** $\frac{n+U_0^{n+1}}{n+1}$

**Zadanie 115.** Niech $Z_1, \ldots, Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto o gęstości

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\theta}{(x+\lambda)^{\theta+1}}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 1$, $\lambda > 0$ są ustalonymi liczbami. Wyznaczyć $E(Z_1 + \cdots + Z_n | \min\{Z_1, \ldots, Z_n\} = t)$, gdzie $t$ jest ustaloną liczbą większą od zera.
**Odp.** $nt + (n-1)\frac{\lambda+t}{\theta-1}$

**Zadanie 116.** Zmienna losowa $(X, Y, Z)$ ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $(0, 0, 0)$ i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 4 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $Var((X+Y)Z)$.
**Odp.** 10.25

**Zadanie 117.** Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną 1, a $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną 2. Niech $N$ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 4. Wszystkie zmienne są niezależne. Niech

$$T = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i, & \text{gdy } N \geq 1, \\ 0, & \text{gdy } N = 0, \end{cases} \qquad S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_i, & \text{gdy } N \geq 1, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć współczynnik korelacji $Corr(T, S)$ między zmiennymi $T$ i $S$.
**Odp.** 0.5

**Zadanie 118.** Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\alpha > 0$ jest ustalonym parametrem. Niech $N$ będzie zmienną losową, niezależną od $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ o rozkładzie ujemnym dwumianowym $P(N = n) = \binom{n+r-1}{n} p^r (1-p)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie $r > 0$ i $p \in (0, 1)$ są ustalonymi parametrami. Niech

$$Z_N = \begin{cases} \max\{X_1, \ldots, X_N\}, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $E(NZ_N)$ i $Var(NZ_N)$.
**Odp.** $E(NZ_N) = \frac{1-p^r}{\alpha}$ i $Var(NZ_N) = \frac{1-p^{2r}}{\alpha^2}$

**Zadanie 119.** Niech $(X, Y)$ będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{dla } x > 0 \text{ i } y \in (0, 1), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $Z = X + 2Y$. Wyznaczyć łączny rozkład zmiennych $Z$ i $X$.
**Odp.** funkcja gęstości $g(z, x) = e^{-x}/2$ na zbiorze $\{(z, x) : 0 < x < z < 2 + x\}$

**Zadanie 120.** Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 0.5 i niech $N$ będzie zmienną losową niezależną od $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną równą 3. Niech

$$Y_i = \begin{cases} 0, & \text{gdy } X_i \le d, \\ X_i - d, & \text{gdy } X_i > d, \end{cases}$$

gdzie $d$ jest ustaloną liczbą dodatnią. Wyznaczyć funkcję tworzącą momenty zmiennej $Z = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ w punkcie 1, a więc $E(e^Z)$.
**Odp.** $\exp(3e^{-2d})$

**Zadanie 121.** Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i mają jednakową wariancję $\sigma^2$. Niech $U = 3X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ i $V = X_l + X_2 + \cdots + X_{n-1} + 2X_n$. Wyznaczyć współczynnik korelacji między $U$ i $V$.
**Odp.** $\sqrt{\frac{n+3}{n+8}}$

**Zadanie 122.** Wykonujemy rzuty symetryczną kością do gry do chwili uzyskania drugiej „szóstki". Niech $Y$ oznacza zmienną losową równą liczbie rzutów, w których uzyskaliśmy inne wyniki niż „szóstka", a $X$ zmienną losową równą liczbie rzutów, w których uzyskaliśmy „jedynkę". Obliczyć $E(Y - X|X = 4)$.
**Odp.** 12

**Zadanie 123.** Niech $X_1, X_2, X_3, X_4$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym $X_1$ ma rozkład Pareto$(1, 1)$ a pozostałe zmienne mają jednakowy rozkład Pareto$(1, 2)$. Obliczyć prawdopodobieństwo

$$P\left(\min\{X_1, X_2, X_3, X_4\} < X_1 < \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}\right).$$

Rozkład Pareto$(\lambda, \theta)$ jest rozkładem o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\theta \theta}{(\lambda+x)^{\theta+1}}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

**Odp.** 2/5

**Zadanie 124.** Niech $(X, Y)$ będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(xy) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}, & \text{dla } x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $Z = \frac{X}{Y}$ oraz $V = X^2 + Y^2$. Udowodnić, że funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej $Z$ wyraża się wzorem $g(z) = \frac{2}{\pi(1+z^2)}$ dla $z \in (0, +\infty)$.
**Odp.** —

**Zadanie 125.** Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ mają jednakową wartość oczekiwaną $\mu$, jednakową wariancję $\sigma^2$ i współczynnik korelacji $Corr(X_i, X_j) = \varrho$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $Z_1, \ldots, Z_n$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ i mają rozkłady postaci $P(Z_i = 0) = P(Z_i = 1) = 0.5$. Obliczyć wariancję zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i$.
**Odp.** $n\frac{\mu^2}{4} + n\frac{\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{n-1}{2}\varrho\right)$

**Zadanie 126.** Niech $N$, $X_1, X_2, \ldots$, $Y_1, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_i$, $i = 1, 2, \ldots$, mają rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej 1, zmienne losowe $Y_i$, $i = 1, 2, \ldots$, mają rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej 2. Warunkowy rozkład zmiennej losowej $N$ przy danym $\Lambda = \lambda$ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda$. Rozkład brzegowy zmiennej $\Lambda$ jest rozkładem gamma o gęstości

$$f(\lambda) = \begin{cases} 16\lambda e^{-4\lambda}, & \text{dla } \lambda > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0, \end{cases} \quad \text{i} \quad T = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} Y_i, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć współczynnik korelacji $Corr(T, S)$.
**Odp.** 5/9

**Zadanie 127.** Niech $(X, Y)$ będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x, & \text{dla } x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $S = X + Y$ i $V = Y - X$. Wyznaczyć $Var(V|S = 0.5)$.
**Odp.** 1/18

**Zadanie 128.** Niech $X_1$ i $X_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$. Rozważmy zmienną losową równą bezwzględnej wartości różnicy pierwotnych zmiennych $X_1$ i $X_2$. Obliczyć wartość oczekiwaną $\mu$ oraz wariancję $\sigma^2$ zmiennej losowej $|X_1 - X_2|$.
**Odp.** $\mu = \frac{1}{3}$, $\sigma^2 = \frac{1}{18}$

**Zadanie 129.** Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 3. Niech $N$ będzie zmienną losową niezależną od zmiennych $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną 2. Niech

$$Z_N = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N} iX_i, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $VarZ_N$. (Wskazówka: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)
**Odp.** $9.75 - 0.75e^{-2}$

**Zadanie 130.** Wykonujemy $n$ niezależnych doświadczeń, z których każde może się zakończyć jednym z czterech wyników: $A_1, A_2, A_3, A_4$. Niech $N_i$ oznacza liczbę doświadczeń, w których uzyskano wynik $A_i$, a $p_i$ prawdopodobieństwo uzyskania wyniku $A_i$ w pojedynczym doświadczeniu, gdzie $i = 1, 2, 3, 4$. Wiadomo, że $p_1 = \frac{1}{15}$ i $p_2 = \frac{4}{15}$. Jaka jest wartość $p_3$, jeżeli zmienne losowe $N_1 + N_2$ i $N_1 + N_3 - N_4$ są nieskorelowane.
**Odp.** $\frac{45}{75}$

**Zadanie 131.** Niech $(X, Y)$ będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{x^4}, & \text{dla } x > 1 \text{ i } y \in (1, 2), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $S = XY$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X$ przy $S = 3$.
**Odp.** $g(x|S = 3) = \frac{108}{x^5}$ dla $x \in (1.5, 3)$

**Zadanie 132.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_{10}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\lambda > 0$ jest ustaloną liczbą. Niech $S = X_1 + \cdots + X_{10}$. Obliczyć

$$P\left(X_1 > \frac{S}{2} \vee X_2 > \frac{S}{2} \vee \cdots \vee X_{10} > \frac{S}{2}\right).$$

**Odp.** 5/256

**Zadanie 133.** Niech $(U_1, \ldots, U_n)$ będzie próbą niezależnych zmiennych losowych z rozkładu jednostajnego na odcinku $(0, 1)$, a więc niech łączna gęstość próby wynosi:

$$f(u_1, \ldots, u_n) = 1 \quad \text{dla każdego} \quad (u_1, \ldots, u_n) \in (0, 1)^n.$$

Załóżmy, że $n > 1$. Niech $(Y_1, \ldots, Y_n)$ oznacza próbę $(U_1, \ldots, U_n)$ uporządkowaną w kolejności rosnącej. Oznaczmy gęstość próby uporządkowanej przez $g(y_1, \ldots, y_n)$. Oczywiście gęstość ta przyjmuje wartości dodatnie na zbiorze:

$$\{(y_1, \ldots, y_n) : 0 < y_1 < \cdots < y_n < 1\}.$$

Wyznaczyć gęstość $g$ na tym zbiorze.
**Odp.** $g(y_1, \ldots, y_n) = n!$

**Zadanie 134.** Rzucamy 12 razy symetryczną monetą. Niech $X_4$ oznacza liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach, a $X_{12}$ liczbę orłów we wszystkich dwunastu rzutach. Obliczyć $EVar(X_4|X_{12})$.
**Odp.** 2/3

**Zadanie 135.** W konkursie złożonym z trzech etapów startuje niezależnie $n$ uczestników. Prawdopodobieństwo, że uczestnik odpadnie po pierwszym etapie jest równe $\theta$. Prawdopodobieństwo, że uczestnik, który przeszedł etap pierwszy, odpadnie w etapie drugim też jest równe $\theta$. Niech $K$ oznacza liczbę uczestników, którzy odpadli w pierwszym etapie, zaś $M$ liczbę uczestników, którzy odpadli w etapie drugim. Niech $\theta = \frac{3}{5}$. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(K + M = k)$ dla $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
**Odp.** $\binom{n}{k}\frac{21^k 4^{n-k}}{5^{2n}}$

**Zadanie 136.** Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie zadanym gęstością

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{dla } x \in (0,1), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczyć $E(X_1 + \cdots + X_n| \max\{X_1, \ldots, X_n\} = t)$, gdzie $t$ jest ustaloną liczbą z przedziału $(0, 1)$.
**Odp.** $\frac{3n+1}{4}t$

**Zadanie 137.** Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ mają jednakową wartość oczekiwaną $\mu$, jednakową wariancję $\sigma^2$ i współczynnik korelacji $Corr(X_i, X_j) = \varrho$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $Z_1, \ldots, Z_n$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ i mają rozkłady postaci $P(Z_i = -1) = p = 1 - P(Z_i = 1)$. Obliczyć wariancję zmiennej losowej $\sum_{i=1}^n Z_i X_i$.
**Odp.** $n\sigma^2(1 + (n-1)\varrho(1-2p)^2)$

**Zadanie 138.** Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_5$ są niezależne i mają jednakowy rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest ustaloną liczbą. Niech $Y$ oznacza zmienną losowa równą 1, gdy $X_1 \geq 3$ i równą 0 w pozostałych przypadkach. Niech $T = \sum_{i=1}^5 X_i$. Wyznaczyć $E(Y|T = 5)$.
**Odp.** 0.0256

**Zadanie 139.** Zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne i każda ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(1+x)^5}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Rozważamy zmienną losową $U = \frac{\ln X}{\ln[(1+X)(1+Y)]}$. Udowodnić, że zmienna losowa $U$ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$.
**Odp.** —

**Zadanie 140.** Zmienna losowa $(X, Y, Z)$ ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $EX = EY = 1$, $EZ = 0$ i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $Var((X - Y)Z)$.
**Odp.** 13

**Zadanie 141.** Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne i mają rozkład dwupunktowy $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 0.5$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Obliczyć $P(S_{10} = 4 \text{ i } S_n \leq 6 \text{ dla } n = 1, 2, \ldots, 9)$.
**Odp.** 119/1024

**Zadanie 142.** Niech $(X, Y)$ będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & \text{dla } y > 0 \text{ i } x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $Z = \frac{X}{X^2+Y^2}$ i $V = \sqrt{X^2+Y^2}$. Wykazać, że funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej $V$ wyraża się wzorem $g(v) = 1$ dla $v \in (0,1)$.
**Odp.** —

**Zadanie 143.** Rzucamy symetryczną kostka do gry tak długo, aż uzyskamy każdą liczbę oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.
**Odp.** 14.7

**Zadanie 144.** Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(1, 2)$. Niech $N$ będzie zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym

$$P(N = n) = \binom{n+2}{n} p^3 (1-p)^n \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

niezależną od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ Niech

$$M_N = \begin{cases} \max\{X_1, \ldots, X_N\}, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $EM_N$.
**Odp.** $2 - p^3 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p$

**Zadanie 145.** Niech $X$ i $Y$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, przy czym $EX = 4$ i $EY = 6$. Rozważamy zmienną losową $Z = \frac{X}{X+Y}$. Wyznaczyć medianę rozkładu zmiennej $Z$.
**Odp.** 0.4

**Zadanie 146.** Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_{25}$ są niezależne o jednakowym rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$. Niech $S_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i$ i $S_{25} = \sum_{i=1}^{25} X_i$. Wyznaczyć $E(S_{10}|S_{25})$.
**Odp.** $6\sigma^2 + 0.16 S_{25}$

**Zadanie 147.** Załóżmy, że $X$ i $Y$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Zmienna losowa $T$ jest równa

$$T = \frac{|X|}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Wyznaczyć funkcję gęstości zmiennej losowej $T$.
**Odp.** $\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (0,1)$

**Zadanie 148.** Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi dodatnimi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej $a$. Niech $N$ i $M$ będą zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona niezależnymi od siebie nawzajem i od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, przy czym $EN = \lambda$ i $EM = \mu$. Niech

$$Y_n = \begin{cases} \max\{X_1, \ldots, X_n\}, & \text{gdy } n > 0, \\ 0, & \text{gdy } n = 0. \end{cases}$$

Obliczyć $P(Y_{M+N} > Y_M)$.
**Odp.** $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - \exp(-\lambda - \mu))$

**Zadanie 149.** Zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne i każda ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $\lambda > 0$. Obliczyć

$$Var(\min\{X, Y\}|X + Y = 2).$$

**Odp.** $\frac{1}{12}$

**Zadanie 150.** Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots, I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ oraz $N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $\mu > 0$. Zmienne losowe $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ mają rozkład dwupunktowy $P(I_i = 1) = p = 1 - P(I_i = 0)$, gdzie $p \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą. Zmienna $N$ ma rozkład ujemny dwumianowy $P(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!}(1-q)^r q^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie $r > 0$ i $q \in (0,1)$ są ustalone. Niech

$$T_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0, \end{cases} \qquad S_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} I_i X_i, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0, \end{cases}$$

Wyznaczyć kowariancję $Cov(T_N, S_N)$.
**Odp.** $\frac{p\mu^2 rq(2-q)}{(1-q)^2}$

**Zadanie 151.** Niech $X$ będzie zmienną losową o rozkładzie Pareto o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{64}{(2+x)^5}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $Y$ będzie zmienną losową równą

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{gdy } X \leq 3, \\ X - 3, & \text{gdy } X > 3. \end{cases}$$

Wyznaczyć $Var(Y|X > 3)$.
**Odp.** 950

**Zadanie 152.** Niech $X_1, X_2$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie ujemnym dwumianowym $NB\left(2, \frac{3}{4}\right)$

$$P(X_i = n) = \binom{n+1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wyznaczyć $P(X_1 = 3|X_1 + X_2 = 6)$.
**Odp.** 4/21

**Zadanie 153.** Załóżmy, że $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym i $EX_i = \frac{1}{\lambda}$. Niech

$$N = \min\left\{k \geq 0 : \sum_{i=1}^{k} X_i > a\right\},$$

gdzie $a$ jest ustaloną liczbą dodatnią. Podać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $N$.
**Odp.** $P(N = k) = \frac{(a\lambda)^k}{k!}\exp(-a\lambda)$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

**Zadanie 154.** Niech $X_0, X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1. Obliczyć $E(\min\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}|X_0)$.
**Odp.** $\frac{1}{n}\left(1 - \exp(-nX_0)\right)$

**Zadanie 155.** Niech $X_1, X_2, X_3, X_4$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z gęstością

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć $E\left(\frac{\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}}{\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}}\right)$.
**Odp.** $\frac{16}{35}$

**Zadanie 156.** Niech $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 1. Niech $N$ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $\lambda$, niezależną od zmiennych $X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Niech $M_N = \min\{X_0, X_1, \ldots, X_N\}$. Wyznaczyć $Cov(M_N, N)$.
**Odp.** $1 - \frac{\lambda+1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$

**Zadanie 157.** Niech $N$, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna losowa $N$ ma rozkład geometryczny

$$P(N = n) = (1 - q)q^n \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie $q \in (0, 1)$ jest ustaloną liczbą, a $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną $\frac{1}{\lambda}$. Niech

$$S_N = \begin{cases} X_1 + \cdots + X_N, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(S_N \leq x)$ dla $x > 0$.
**Odp.** $1 - (1 - q)e^{-\lambda(1-q)x}$

**Zadanie 158.** W urnie znajduje się trzydzieści kul, na każdej narysowana jest litera i cyfra. Mamy dziesięć kul oznaczonych $X1$, osiem kul oznaczonych $Y1$, osiem kul oznaczonych $X2$ oraz cztery kule oznaczone $Y2$. Losujemy bez zwracania piętnaście kul. Niech $N_X$ określa liczbę kul oznaczonych literą $X$ wśród wylosowanych, a $N_2$ liczbę kul z cyfrą 2 wśród kul wylosowanych. Obliczyć $E(N_X|N_2)$.
**Odp.** $\frac{1}{3}(25 - \frac{1}{3}N_2)$

**Zadanie 159.** Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są warunkowo niezależne przy danej wartości $\theta \in (0, 1)$ i mają rozkład prawdopodobieństwa

$$P(X_i = 1|\theta) = \theta = 1 - P(X_i = 0|\theta).$$

Zmienna losowa $\theta$ ma rozkład beta określony na przedziale $(0, 1)$ o gęstości $f(\theta) = 12\theta^2(1 - \theta)$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Obliczyć $P(S_8 > 0|S_6 = 0)$.
**Odp.** $\frac{5}{11}$

**Zadanie 160.** Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 1. Niech $N$ będzie zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym $NB\left(2, e^{-1}\right)$:

$$P(N = n) = \binom{n+1}{n}\left(\frac{1}{e}\right)^2\left(1 - \frac{1}{e}\right)^n \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

niezależną od zmiennych $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ Niech

$$M_N = \begin{cases} \min\{X_1, \ldots, X_N\}, & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć $EM_N$.
**Odp.** $e^{-1}$

**Zadanie 161.** W urnie znajduje się 40 kul, z których 25 jest białych i 15 czarnych. Losujemy bez zwracania najpierw 13 kul, a następnie z pozostałych kul w urnie losujemy bez zwracania 8 kul. Niech $S_1$ oznacza liczbę kul białych w pierwszym losowaniu, a $S_2$ liczbę kul białych w drugim losowaniu. Obliczyć $Cov(S_1, S_2)$.
**Odp.** $-5/8$

**Zadanie 162.** Losujemy ze zwracaniem po jednej karcie do gry z talii 52 kart tak długo aż wylosujemy pika. Niech $Y$ oznacza zmienną losową równą liczbie wyciągniętych kart, a $X$ zmienną losową równą liczbie kart, w których uzyskaliśmy karo. Obliczyć $E(Y|X = 4)$.
**Odp.** 10

**Zadanie 163.** Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym i $EX_i = \frac{1}{\lambda}$. Niech $T_0 = 0$ i $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Niech $Y$ będzie zmienną losową niezależną od zmiennych $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ o rozkładzie gamma o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \beta^2 x \exp(-\beta x), & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\beta > 0$ jest ustaloną liczbą. Niech

$$N = \max\{n \geq 0 : T_n \leq Y\}.$$

Podać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $N$.
**Odp.** $P(N = n) = (n+1) \left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\beta+\lambda}\right)^r$ dla $n = 0, 1, 2 \ldots$

**Zadanie 164.** Zmienne losowe $U$ i $V$ są niezależne i mają rozkłady jednostajne na przedziale $(0, 2)$. Niech $X = \max\{U, V\}$ i $Y = \min\{U, V\}$. Które z następujących stwierdzeń jest prawdziwe?
(A) $Cov(X, Y) = 0$.
(B) $P(X^2 + Y^2 < 4) = 0.5$.
(C) $P(X + Y \leq 2) = 0.75$.
(D) $P(X - Y \geq 1) = 0.5$.
(E) $Cov(X, Y) = \frac{1}{9}$.
**Odp.** E