Zdarzenia

1.1. Tarcza strzelnicza składa się z dziesięciu kół ograniczonych okręgami o promieniach r_k $(k = 1, \ldots, 10)$, gdzie $r_1 < r_2 < \cdots < r_{10}$. Niech zdarzenie A_k oznacza trafienie wewnątrz okręgu o promieniu r_k. Co oznaczają zdarzenia

$$B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k, \qquad C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k, \qquad D = A_1' A_2?$$

1.2. Udowodnić, że $(A \cup B)'C = A'B \cup B'C$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BC$.

1.3. W zbiorze ω punktów E wyróżniono n podzbiorów A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dla dowolnego zbioru punktów oznaczmy przez $\chi_C(\omega)$ funkcję charakterystyczną zbioru C, tzn. niech $\chi_C(\omega) = 1$, gdy $\omega \in C$, oraz $\chi_C(\omega) = 0$, gdy $\omega \notin C$. Pokazać, że używając zbiorów A_i można skonstruować takie zbiory B_k $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$, że dla dowolnej funkcji ograniczonej

$$F(\omega) = F(\chi_{A_1}(\omega), \ldots, \chi_{A_n}(\omega))$$

istnieją takie stałe C_k, że

$$F(\omega) = \sum_k C_k \chi_{B_k}(\omega)$$

1.4. Udowodnić, że jeżeli cecha A pojawia się częściej łącznie z cechą B niż bez niej, to B pojawia się razem z A w większej ilości przypadków niż bez niego. Innymi słowami, wiadomo, że

$$N\{AB\}/N\{B\} \geq N\{AB'\}/N\{B'\}.$$

1.5. Wiadomo, że $N\{A\} = N\{B\} = \frac{1}{2}N$. Udowodnić, że

$$N\{AB\} = N\{A'B'\}.$$

1.6. Wiadomo, że $N\{A\} = N\{B\} = N\{C\} = \frac{1}{2}N$ oraz $N\{ABC\} = N\{A'B'C'\}$. Udowodnić, że

$$2N\{ABC\} = N\{AB\} + N\{AC\} + N\{BC\} - \frac{1}{2}N.$$

1.7. Wykazać, że poniższe dane są sprzeczne:

$$N = 1000, \qquad N\{A\} = 525, \qquad N\{B\} = 312, \qquad N\{C\} = 470,$$

$$N\{AB\} = 42, \qquad N\{AC\} = 147, \qquad N\{BC\} = 86, \qquad N\{ABC\} = 25.$$

Wskazówka: obliczyć $N\{A'B'C'\}$.

1.8. Następujące wielkości zostały podane jako wyniki pewnych obserwacji:

$$N = 1000, \qquad N\{A\} = 510, \qquad N\{B\} = 490, \qquad N\{C\} = 427,$$

$$N\{AB\} = 189, \qquad N\{AC\} = 140, \qquad N\{BC\} = 85.$$

Wykazać, że dane te muszą zawierać błąd i że błąd ten może polegać na opuszczeniu 1 przed 85 przy liczebności $N\{BC\}$.

1.9. Udowodnić, że jeżeli $N\{A\} = Nx$, $N\{B\} = 2Nx$, $N\{C\} = 3Nx$, $N\{AB\} = N\{AC\} = N\{BC\} = Ny$, to wartości x i y nie mogą przewyższać $1/2$.

1.10. Poniższe dane dotyczą wyników badania 10000 chłopców w wieku szkolnym (cecha A oznacza tutaj braki w rozwoju fizycznym, B — cechy nerwicowe oraz D — niedorozwój umysłowy):

$$N = 10000, \quad N\{A\} = 877, \quad N\{B\} = 1086, \quad N\{D\} = 789, \quad N\{AB\} = 338, \quad N\{BD\} = 455.$$

Udowodnić, że niektórzy chłopcy upośledzeni umysłowo nie wykazują braków w rozwoju fizycznym i ocenić możliwą ilość takich chłopców.

1.11. Poniższe dane są analogiczne jak w poprzednim zadaniu z tą różnicą, że dotyczą dziewczynek:

$$N = 10000, \quad N\{A\} = 682, \quad N\{B\} = 850, \quad N\{D\} = 689, \quad N\{AB\} = 248, \quad N\{BD\} = 368.$$

Udowodnić, że niektóre dziewczynki wykazujące braki w rozwoju fizycznym nie wykazują braków w rozwoju umysłowym i oszacować minimalną możliwą ilość takich dziewczynek.

1.12. Przeprowadzono 100 serii trzykrotnych rzutów monetą i za każdym razem notowano, czy pojawia się orzeł czy reszka. W 69 przypadkach na 100 orzeł wypadł przy pierwszym rzucie, w 49 przypadkach — przy drugim rzucie, w 53 przypadkach przy trzecim rzucie. W 33 przypadkach pojawiał się przy pierwszym i drugim rzucie, a w 21 przypadkach — przy drugim i trzecim. Wykazać, że w co najmniej 5 przypadkach orzeł musiał wypaść przy wszystkich trzech rzutach, a w co najwyżej 15 przypadkach przy wszystkich rzutach mogła wypaść reszka; mogło też się zdarzyć, że ani razu nie otrzymano trzech reszek.