

## Zdarzenia

**1.1.** Tarcza strzelnicza składa się z dziesięciu kół ograniczonych okręgami o promieniach  $r_k$  ( $k = 1, \dots, 10$ ), gdzie  $r_1 < r_2 < \dots < r_{10}$ . Niech zdarzenie  $A_k$  oznacza trafienie wewnątrz okręgu o promieniu  $r_k$ . Co oznaczają zdarzenia

$$B = \bigcup_{k=1}^6 A_k, \quad C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k, \quad D = A'_1 A_2?$$

**1.2.** Udowodnić, że  $(A \cup B)'C = A'B \cup B'C$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $AC = BC$ .

**1.3.** W zbiorze  $\omega$  punktów  $E$  wyróżniono  $n$  podzbiorów  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Dla dowolnego zbioru punktów oznaczmy przez  $\chi_C(\omega)$  funkcję charakterystyczną zbioru  $C$ , tzn. niech  $\chi_C(\omega) = 1$ , gdy  $\omega \in C$ , oraz  $\chi_C(\omega) = 0$ , gdy  $\omega \notin C$ . Pokazać, że używając zbiorów  $A_i$  można skonstruować takie zbiory  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 2^n$ ), że dla dowolnej funkcji ograniczonej

$$F(\omega) = F(\chi_{A_1}(\omega), \dots, \chi_{A_n}(\omega))$$

istnieją takie stałe  $C_k$ , że

$$F(\omega) = \sum_k C_k \chi_{B_k}(\omega)$$

**1.4.** Udowodnić, że jeżeli cecha  $A$  pojawia się częściej łącznie z cechą  $B$  niż bez niej, to  $B$  pojawia się razem z  $A$  w większej ilości przypadków niż bez niego. Innymi słowami, wiadomo, że

$$N\{AB\}/N\{B\} \geq N\{AB'\}/N\{B'\}.$$

**1.5.** Wiadomo, że  $N\{A\} = N\{B\} = \frac{1}{2}N$ . Udowodnić, że

$$N\{AB\} = N\{A'B'\}.$$

**1.6.** Wiadomo, że  $N\{A\} = N\{B\} = N\{C\} = \frac{1}{2}N$  oraz  $N\{ABC\} = N\{A'B'C'\}$ . Udowodnić, że

$$2N\{ABC\} = N\{AB\} + N\{AC\} + N\{BC\} - \frac{1}{2}N.$$

**1.7.** Wykazać, że poniższe dane są sprzeczne:

$$\begin{aligned} N &= 1000, & N\{A\} &= 525, & N\{B\} &= 312, & N\{C\} &= 470, \\ N\{AB\} &= 42, & N\{AC\} &= 147, & N\{BC\} &= 86, & N\{ABC\} &= 25. \end{aligned}$$

Wskazówka: obliczyć  $N\{A'B'C'\}$ .

**1.8.** Następujące wielkości zostały podane jako wyniki pewnych obserwacji:

$$\begin{aligned} N &= 1000, & N\{A\} &= 510, & N\{B\} &= 490, & N\{C\} &= 427, \\ N\{AB\} &= 189, & N\{AC\} &= 140, & N\{BC\} &= 85. \end{aligned}$$

Wykazać, że dane te muszą zawierać błąd i że błąd ten może polegać na opuszczeniu 1 przed 85 przy liczebności  $N\{BC\}$ .

**1.9.** Udowodnić, że jeżeli  $N\{A\} = Nx$ ,  $N\{B\} = 2Nx$ ,  $N\{C\} = 3Nx$ ,  $N\{AB\} = N\{AC\} = N\{BC\} = Ny$ , to wartości  $x$  i  $y$  nie mogą przewyższać  $1/2$ .

**1.10.** Poniższe dane dotyczą wyników badania 10000 chłopców w wieku szkolnym (cecha  $A$  oznacza tutaj braki w rozwoju fizycznym,  $B$  — cechy nerwicowe oraz  $D$  — niedorozwój umysłowy):

$$N = 10000, \quad N\{A\} = 877, \quad N\{B\} = 1086, \quad N\{D\} = 789, \quad N\{AB\} = 338, \quad N\{BD\} = 455.$$

Udowodnić, że niektórzy chłopcy upośledzeni umysłowo nie wykazują braków w rozwoju fizycznym i ocenić możliwą ilość takich chłopców.

**1.11.** Poniższe dane są analogiczne jak w poprzednim zadaniu z tą różnicą, że dotyczą dziewczynek:

$$N = 10000, \quad N\{A\} = 682, \quad N\{B\} = 850, \quad N\{D\} = 689, \quad N\{AB\} = 248, \quad N\{BD\} = 368.$$

Udowodnić, że niektóre dziewczynki wykazujące braki w rozwoju fizycznym nie wykazują braków w rozwoju umysłowym i oszacować minimalną możliwą ilość takich dziewczynek.

**1.12.** Przeprowadzono 100 serii trzykrotnych rzutów monetą i za każdym razem notowano, czy pojawia się orzeł czy reszka. W 69 przypadkach na 100 orzeł wypadł przy pierwszym rzucie, w 49 przypadkach — przy drugim rzucie, w 53 przypadkach przy trzecim rzucie. W 33 przypadkach pojawiał się przy pierwszym i drugim rzucie, a w 21 przypadkach — przy drugim i trzecim. Wykazać, że w co najmniej 5 przypadkach orzeł musiał wypaść przy wszystkich trzech rzutach, a w co najwyżej 15 przypadkach przy wszystkich rzutach mogła wypaść reszka; mogło też się zdarzyć, że ani razu nie otrzymano trzech reszek.