Zadania o rozmieszczeniu i kombinatoryka

2.1. Dane jest $p = P(A)$, $q = P(B)$, $r = P(A \cup B)$. Obliczyć $P(AB')$, $P(A'B')$.

2.2. Wiadomo, że $P(AB) = P(A)P(B)$, tzn. że zdarzenia A i B są niezależne, $C \supset AB$ i $C' \supset A'B'$. Udowodnić, że $P(AC) \geq P(A)P(C)$.

2.3. Wiadomo, że jednoczesne zajście zdarzeń A_1 i A_2 pociąga za sobą zajście zdarzenia A. Udowodnić, że $P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$.

2.4. Udowodnić, że jeżeli $A_1A_2A_3 \subset A$, to $P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$.

2.5. W wyniku doświadczenia $\mathfrak{A}$ mogą zajść trzy wzajemnie wyłączające się zdarzenia A_n, a w wyniku doświadczenia $\mathfrak{B}$ — cztery wzajemnie wyłączające się zdarzenia B_m. Dane są prawdopodobieństwa $p_{nm} = P(A_nB_m)$:

$$p_{11} = 0.01,\ p_{21} = 0.02,\ p_{31} = 0.07,\ p_{12} = 0.02,\ p_{22} = 0.04,\ p_{32} = 0.15,$$

$$p_{13} = 0.03,\ p_{23} = 0.08,\ p_{33} = 0.20,\ p_{14} = 0.04,\ p_{24} = 0.06,\ p_{34} = 0.28.$$

Obliczyć $P(A_n)$ i $P(B_m)$ dla wszystkich n i m.

2.6. Rzucamy monetą tak długo, dopóki nie upadnie ona dwa razy z rzędu tą samą stroną. Każdemu z możliwych wyników składającemu się z n rzutów przypisujemy jednakowe prawdopodobieństwo 2^{-n}. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych. Znaleźć prawdopodobieństwa następujących zdarzeń: doświadczenie zakończy się nie później niż przy szóstym rzucie; będzie potrzeba parzystej liczby rzutów.

2.7. Rzucamy dwie kostki do gry. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma oczek jest liczbą nieparzystą, a B niech oznacza zdarzenie polegające na tym, że choćby na jednej kostce wypadła jedynka. Opisać zdarzenia AB, $A \cup B$, $(AB)'$. Znaleźć ich prawdopodobieństwa przy założeniu, że wszystkie 36 możliwych wyników ma jednakowe prawdopodobieństwo.

2.8. Dziecko bawi się dziesięcioma klockami drewnianego alfabetu; na klockach namalowane są litery A, A, A, E, K, M, M, T, T, Y. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ułoży ono przypadkowo słowo $MATEMATYKA$?

2.9. Na parterze siedmiopiętrowego domu wsiadło do windy pięć osób. Zakładając, że każda z nich wysiada na każdym z pięter z jednakowym prawdopodobieństwem, obliczyć prawdopodobieństwo, że każda z pięciu osób wysiądzie na innym piętrze.

2.10. Sześcian, którego ściany zostały pomalowane, rozpiłowano na tysiąc małych sześcianików o jednakowej objętości, a następnie wybrano losowo jeden z tych sześcianów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany sześcian będzie miał dwie ściany pomalowane?

2.11. Pewien element może być wykonany zarówno z materiału A, jak i z materiału B. Aby sprawdzić, który materiał nadaje się lepiej dla wykonania danego elementu pod względem wytrzymałości na obciążenia, wykonano n elementów z każdego materiału i poddano je obciążeniu próbnemu. Niech x_i (y_j) oznacza maksymalne obciążenie, jakie wytrzymał i–ty (j–ty) element wykonany z materiału A (B). Zakładamy, że wszystkie x_i oraz y_j są różne. Zdecydowano opracować wyniki eksperymentu posługując się metodą Wilcoxona. W tym celu ustawiono wszystkie x_i oraz y_j we wspólny ciąg według wielkości i dla każdego j obliczono n_j, równe ilości x–ów poprzedzających y_j. Okazało się, że $\sum n_j \leq m$. Na podstawie tego wyniku uzasadniono, że elementy wykonane z materiału A są lepsze. Jeżeli elementy z obu materiałów są jednakowo wytrzymałe, tzn. wszystkie ustawienia x oraz y w ciąg są jednakowo prawdopodobne, znaleźć prawdopodobieństwo otrzymanej nierówności dla $n = 4$ oraz $m = 2$.

2.12. Talia kart zawiera 52 karty czterech kolorów, po 13 kart w każdym. Załóżmy, że talia ta jest starannie przetasowana, tak że wyciągnięcie każdej karty jest jednakowo prawdopodobne. Wybieramy losowo sześć kart. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz
a. obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wybranych kart znajdzie się król pik;
b. obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wybranych kart znajdą się karty wszystkich czterech kolorów;
c. jaka jest najmniejsza ilość kart, które należy wylosować z talii, aby prawdopodobieństwo, że znajdą się wśród nich dwie karty tej samej wartości wynosiło co najmniej $\frac{1}{2}$?

2.13. n osób zasiadło przy okrągłym stole rozmieszczając się w przypadkowy sposób. Znaleźć prawdopodobieństwo, że
a. dwie ustalone osoby A i B będą siedziały koło siebie, przy czym A będzie siedział po lewej stronie B;
b. trzy ustalone osoby A, B i C będą siedziały rzędem, przy czym A siedzi po prawej stronie B, a C po jego lewej stronie;
c. obliczyć te same prawdopodobieństwa w przypadku, gdy n osób zasiada po jednej stronie prostokątnego stołu.

2.14. Wybieramy przypadkowo dwie liczby z ciągu $1, 2, \ldots, n$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że jedna z nich będzie mniejsza od k, a druga większa od k, gdzie $1 < k < n$ jest dowolną liczbą całkowitą.

2.15. Z ciągu liczb $1, 2, \ldots, N$ wybrano losowo n liczb i ustawiono je w porządku rosnącym: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że $x_m \leq M$. Znaleźć granicę tego prawdopodobieństwa przy $M, N \to \infty$ tak, że $M/N \to \alpha > 0$.

2.16. Spośród n losów loteryjnych jest m wygrywających. Jaką szansę wygrania ma posiadacz k losów?

2.17. W pewnej loterii na sto tysięcy losów trzy dają wielką wygraną. Obliczyć
a. prawdopodobieństwo wygrania choćby jednego losu wśród tysiąca losów;
b. ile co najmniej należy kupić losów, aby prawdopodobieństwo uzyskania jednej cennej wygranej było nie mniejsze niż 0.5?

2.18. W partii towaru składającej się z N sztuk znajduje się M sztuk wybrakowanych. Wybieramy losowo n sztuk, gdzie $n \leq N$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdzie się m sztuk wybrakowanych, gdzie $m \leq M$?

2.19. Niech $\varphi(n)$ oznacza ilość liczb całkowitych dodatnich $\leq n$ i względnie pierwszych z n. Udowodnić, że

$$\varphi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

gdzie iloczyn rozciąga się na wszystkie liczby pierwsze p, które są dzielnikami n. (Wskazówka: rozpatrzyć schemat polegający na wyborze losowo jednej z liczb spośród $1, 2, \ldots, n$; obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrana liczba okaże się względnie pierwsza z n.)

2.20. W szafie znajduje się n par butów. Wybieramy z nich losowo $2r$ butów ($2r < n$) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wybranych butów nie ma ani jednej pary; znajduje się dokładnie jedna para; znajdują się dokładnie dwie pary.

2.21. Grupę dzieci składającą się z $2N$ chłopców i $2N$ dziewczynek podzielono losowo na dwie równe części. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w każdej z tych grup znajdzie się jednakowa ilość chłopców i dziewczynek. Znaleźć przybliżenie dla tego prawdopodobieństwa używając wzoru Stirlinga: $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

2.22. W urnie znajduje się n białych i m czarnych kul, gdzie $m < n$. Wyjmujemy kolejno bez zwracania kule z urny. Niech $M(k)$ oznacza ilość kul czarnych wyjętych w pierwszych k ciągnieniach i niech $N(k)$ oznacza ilość kul białych wydobytych w k pierwszych ciągnieniach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dla wszystkich $k = 1, 2, \ldots, n + m$ będzie $M(k) < N(k)$.

2.23. *Zadanie Banacha.* Pewien matematyk nosi przy sobie dwa pudełka zapałek. Ilekroć chce on zapalić papierosa, wydobywa jedno pudełko losowo z kieszeni. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w chwili gdy po raz pierwszy wydobędzie on puste pudełko, drugie pudełko będzie zawierało r zapałek ($r = 0, 1, 2, \ldots, n$; n jest tu ilością zapałek, które na początku znajdowały się w każdym z pudełek).

2.24. Każda z n pałeczek została złamana na dwie części — długą i krótką, po czym wszystkie $2n$ kawałków połączono w n par, z których każda tworzy nową „pałeczkę". Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie pałeczki połączono w porządku pierwotnym; wszystkie części długie połączono z krótkimi.

2.25. Udowodnić, że jest bardziej prawdopodobne otrzymanie choćby jednej jedynki przy jednoczesnym rzucie czterech kostek niż otrzymanie choćby dwóch jedynek przy 24 rzutach parą kostek (odpowiedź znana jest jako tzw. *paradoks kawalera de Méré*, który będąc graczem uważał, że oba te prawdopodobieństwa są równe, i winił matematyków za swoje przegrane).

2.26. Znaleźć prawdopodobieństwo, że przy rozdaniu 52 kart czterem graczom pierwszy z nich otrzyma dokładnie m par „as–król w jednym kolorze".

2.27. W pewnych obszarach Rosji istniał niegdyś następujący ludowy zwyczaj: dziewczyna trzyma w ręce sześć źdźbeł trawy tak, aby ich końce sterczały z obu stron dłoni; jej przyjaciółka wiąże te końce parami, oddzielnie po obu stronach dłoni. Jeżeli przy tym wszystkie sześć źdźbeł utworzy pierścień, ma to wróżyć, że wyjdzie ona w danym roku za mąż.
a. Obliczyć prawdopodobieństwo, że źdźbła przy losowym wiązaniu końców utworzą jeden pierścień.
b. Rozwiązać to samo zadanie dla przypadku $2n$ źdźbeł.