Prawdopodobieństwo geometryczne

3.1. Na kulce narysowano siatkę współrzędnych geograficznych. Rzucamy tę kulkę na płaszczyznę. Zakładamy, że wypadnięcie obszarów o jednakowych powierzchniach są jednakowo prawdopodobne. Obliczyć prawdopodobieństwa, że
a. kulka dotyka płaszczyzny punktem, który znajduje się w obszarze między $0°$ i $90°$ długości wschodniej;
b. kulka dotyka płaszczyzny punktem znajdującym się w obszarze między $45°$ i $90°$ szerokości północnej;
c. mniejszy z łuków wielkiego koła łączącego punkt styczności z biegunem północnym będzie mniejszy od α.

3.2. Wewnątrz koła o promieniu R wybrano losowo jeden punkt. Zakładamy, że prawdopodobieństwo wybrania punktu z danego obszaru wewnątrz koła jest proporcjonalne do pola tego obszaru. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
a. wybrany punkt znajduje się w odległości mniejszej niż r ($r < R$) od środka koła;
b. mniejszy z kątów zawarty między danym kierunkiem i prostą łączącą wybrany punkt z początkiem współrzędnych nie przekracza α.

3.3. Na obwodzie koła o jednostkowym promieniu i środku na początku układu wybieramy losowo jeden punkt. Prawdopodobieństwo wyboru punktu na danym łuku obwodu zależy jedynie od długości tego łuku i jest do niej proporcjonalne. Znaleźć prawdopodobieństwo, że
a. rzut wybranego punktu na średnicę (oś odciętych) znajduje się w odległości nie przekraczającej r ($r < 1$) od początku układu;
b. odległość od wybranego punktu od punktu $(1, 0)$ nie przekracza r.

3.4. W kwadrat o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$ rzucamy losowo punkt. Niech (ξ, η) oznacza jego współrzędne. Zakładamy, że prawdopodobieństwo wpadnięcia punktu w dany obszar wewnątrz kwadratu zależy tylko od powierzchni tego obszaru i jest do niej proporcjonalne.
a. Udowodnić, że dla $0 \le x, y \le 1$ zachodzi $P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\}P\{\eta < y\} = xy$.
b. Dla $0 < z < 1$ znaleźć $P\{|\xi-\eta| < z\}$, $P\{\xi\eta < z\}$, $P\{\min(\xi, \eta) < z\}$, $P\{\max(\xi, \eta) < z\}$, $P\{\frac{1}{2}(\xi+\eta) < z\}$.
c. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pierwiastki równania $x^2 + \xi x + \eta = 0$ będą rzeczywiste; zespolone.
d. Niech $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$ i $\varphi = \arctan \frac{\eta}{\xi}$. Znaleźć łączny rozkład ϱ i φ, tzn. dla wszystkich x i y znaleźć prawdopodobieństwa $P\{\{\varrho < x\}, \{\varphi < y\}\}$.

3.5. Na płaszczyźnie narysowano szereg równoległych prostych w odległości $2a$ od siebie. Rzucamy monetą o promieniu $r < a$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta nie przetnie żadnej z prostych.

3.6. Na nieskończoną szachownicę o boku pola równym a rzucamy monetą o średnicy $2r < a$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
a. moneta wpadnie całkowicie we wnętrze jednego z pól;
b. moneta przetnie się z co najwyżej jednym bokiem pola szachownicy.

3.7. W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $AB = l$, $BC = k$ rzucamy losowo punkt M. Znaleźć łączny rozkład długości h prostopadłej z punktu M na bok AB i kąta $\alpha = \sphericalangle MAB$ (tzn. dla wszystkich x i y znaleźć prawdopodobieństwo, że jednocześnie otrzymamy $\{h < x\}$ i $\{\alpha < y\}$.

3.8. Na płaskiej rozpostartej cynfolii znajduje się punktowe źródło promieniowania radioaktywnego, działające z jednakowym natężeniem we wszystkich kierunkach przestrzeni. Jeżeli równolegle do folii w jednostkowej odległości od niej ustawić ekran, to można na nim będzie zaobserwować punkty wywołane uderzeniami wypromieniowanych cząstek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że kolejny punkt pojawi się w części ekranu położonej wewnątrz koła o promieniu R i środku nad źródłem promieniowania.

3.9. Dwie osoby umówiły się na spotkanie między godziną 10 a 11, przy czym czekają na siebie wzajemnie nie dłużej niż 10 minut. Zakładając, że moment przybycia na spotkanie każdej z osób jest losowy, wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, ze spotkanie dojdzie do skutku.

3.10. Na odcinku długości l wybierane są losowo dwa punkty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z powstałych trzech odcinków można będzie zbudować trójkąt.

3.11. *Zdanie Buffona* Na płaszczyźnie narysowane są proste równoległe w odległości a od siebie. Na płaszczyznę rzucana jest losowo igła o długości $2r < a$. Pod pojęciem „losowo” należy rozumieć, że środek igły pada losowo na prostą prostopadłą do narysowanej siatki i że kąt φ między igłą i narysowanymi prostymi ma rozkład jednostajny, przy czym kąt φ między igła i położenie środka igły są niezależne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie jedną z narysowanych prostych.

3.12. *Zdanie Bertranda* Na okręgu o promieniu r wybiera się losowo dwa punkty i łączy je cięciwą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że długość cięciwy będzie mniejsza niż $r\sqrt{3}$.

3.13. Na odcinku $[-1, 1]$ wybiera się losowo dwa punkty o współrzędnych p i q. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że równanie kwadratowe $x^2 + px + q = 0$ będzie mieć rozwiązania rzeczywiste.

3.14. W okrąg wpisany jest kwadrat. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo rzucony w okrąg punkt trafi w kwadrat.

3.15. Odcinek o długości $a_1 + a_2$ podzielony jest na dwie części o długościach a_1 i a_2 odpowiednio. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie m spośród n punktów losowo rzuconych na ten odcinek trafi w część o długości a_1.

3.16. Na płaszczyźnie narysowana jest szachownica o prostokątnych polach z bokami a i b. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo rzucona na tę szachownicę igła o długości $2r$ ($2r < a + b - \sqrt{(a+b)^2 - \pi ab}$) przetnie co najmniej jeden z boków któregoś prostokąta.

3.17. W kulę o promieniu R wrzuca się losowo N punktów. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że odległość od środka kuli do najbliższego punktu będzie mniejsza niż a, $0 < a < R$. Obliczyć granicę tego prawdopodobieństwa, gdy $R \to \infty$ i $\frac{N}{R^3} \to \frac{4}{3}\pi\lambda$. (Zadanie pochodzi z astronomii; w otoczeniu Słońca $\lambda = 0.0063$, jeżeli R mierzyć w parsekach.)

3.18. Na okręgu wybiera się losowo trzy punkty A, B, C. Obliczyć prawdopodobieństwo, że trójkąt ABC będzie ostrokątny.

3.19. Tarcza strzelecka o promieniu R podzielona jest na trzy koncentryczne pierścienie o promieniach $R_1 < R_2 < R$ za trafienie w które zdobywa się odpowiednio 1, 2 oraz 3 punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo zdobycia dwóch punktów przy jednym strzale (zakładamy, że strzał trafia w tarczę).

3.20. W kwadracie wybieramy losowo dwa punkty A i B. Jakie jest prawdopodobieństwo, że okrąg o średnicy AB całkowicie leży w kwadracie.