

## Prawdopodobieństwo geometryczne

**3.1.** Na kulce narysowano siatkę współrzędnych geograficznych. Rzucamy tę kulkę na płaszczyznę. Zakładamy, że wypadnięcie obszarów o jednakowych powierzchniach są jednakowo prawdopodobne. Obliczyć prawdopodobieństwa, że

- kulka dotyka płaszczyzny punktem, który znajduje się w obszarze między  $0^\circ$  i  $90^\circ$  długości wschodniej;
- kulka dotyka płaszczyzny punktem znajdującym się w obszarze między  $45^\circ$  i  $90^\circ$  szerokości północnej;
- mniejszy z łuków wielkiego koła łączącego punkt styczności z biegunem północnym będzie mniejszy od  $\alpha$ .

**3.2.** Wewnątrz koła o promieniu  $R$  wybrano losowo jeden punkt. Zakładamy, że prawdopodobieństwo wybrania punktu z danego obszaru wewnątrz koła jest proporcjonalne do pola tego obszaru. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

- wybrany punkt znajduje się w odległości mniejszej niż  $r$  ( $r < R$ ) od środka koła;
- mniejszy z kątów zawarty między danym kierunkiem i prostą łączącą wybrany punkt z początkiem współrzędnych nie przekracza  $\alpha$ .

**3.3.** Na obwodzie koła o jednostkowym promieniu i środku na początku układu wybieramy losowo jeden punkt. Prawdopodobieństwo wyboru punktu na danym łuku obwodu zależy jedynie od długości tego łuku i jest do niej proporcjonalne. Znaleźć prawdopodobieństwo, że

- rzut wybranego punktu na średnicę (oś odciętych) znajduje się w odległości nie przekraczającej  $r$  ( $r < 1$ ) od początku układu;
- odległość od wybranego punktu od punktu  $(1, 0)$  nie przekracza  $r$ .

**3.4.** W kwadrat o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  i  $(1, 1)$  rzucamy losowo punkt. Niech  $(\xi, \eta)$  oznacza jego współrzędne. Zakładamy, że prawdopodobieństwo wpadnięcia punktu w dany obszar wewnątrz kwadratu zależy tylko od powierzchni tego obszaru i jest do niej proporcjonalne.

- Udowodnić, że dla  $0 \leq x, y \leq 1$  zachodzi  $P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\}P\{\eta < y\} = xy$ .
- Dla  $0 < z < 1$  znaleźć  $P\{|\xi - \eta| < z\}$ ,  $P\{\xi\eta < z\}$ ,  $P\{\min(\xi, \eta) < z\}$ ,  $P\{\max(\xi, \eta) < z\}$ ,  $P\{\frac{1}{2}(\xi + \eta) < z\}$ .
- Obliczyć prawdopodobieństwo, że pierwiastki równania  $x^2 + \xi x + \eta = 0$  będą rzeczywiste; zespolone.
- Niech  $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$  i  $\varphi = \arctan \frac{\eta}{\xi}$ . Znaleźć łączny rozkład  $\varrho$  i  $\varphi$ , tzn. dla wszystkich  $x$  i  $y$  znaleźć prawdopodobieństwa  $P\{\varrho < x\}$ ,  $\{ \varphi < y \}$ .

**3.5.** Na płaszczyźnie narysowano szereg równoległych prostych w odległości  $2a$  od siebie. Rzucamy monetą o promieniu  $r < a$ . Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta nie przetnie żadnej z prostych.

**3.6.** Na nieskończoną szachownicę o boku pola równym  $a$  rzucamy monetą o średnicy  $2r < a$ . Obliczyć prawdopodobieństwo, że

- moneta wpadnie całkowicie we wnętrze jednego z pól;
- moneta przetnie się z co najwyżej jednym bokiem pola szachownicy.

**3.7.** W trójkąt prostokątny  $ABC$  o przyprostokątnych  $AB = l$ ,  $BC = k$  rzucamy losowo punkt  $M$ . Znaleźć łączny rozkład długości  $h$  prostopadłej z punktu  $M$  na bok  $AB$  i kąta  $\alpha = \sphericalangle MAB$  (tzn. dla wszystkich  $x$  i  $y$  znaleźć prawdopodobieństwo, że jednocześnie otrzymamy  $\{h < x\}$  i  $\{\alpha < y\}$ ).

**3.8.** Na płaskiej rozpostartej cynfolii znajduje się punktowe źródło promieniowania radioaktywnego, działające z jednakowym natężeniem we wszystkich kierunkach przestrzeni. Jeżeli równoległe do folii w jednostkowej odległości od niej ustawić ekran, to można na nim będzie zaobserwować punkty wywołane uderzeniami wypromieniowanych cząstek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że kolejny punkt pojawi się w części ekranu położonej wewnątrz koła o promieniu  $R$  i środku nad źródłem promieniowania.

**3.9.** Dwie osoby umówiły się na spotkanie między godziną 10 a 11, przy czym czekają na siebie wzajemnie nie dłużej niż 10 minut. Zakładając, że moment przybycia na spotkanie każdej z osób jest losowy, wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że spotkanie dojdzie do skutku.

**3.10.** Na odcinku długości  $l$  wybierane są losowo dwa punkty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z powstałych trzech odcinków można będzie zbudować trójkąt.

- 3.11. Zdanie Buffona** Na płaszczyźnie narysowane są proste równoległe w odległości  $a$  od siebie. Na płaszczyznę rzucana jest losowo igła o długości  $2r < a$ . Pod pojęciem „losowo” należy rozumieć, że środek igły pada losowo na prostą prostopadłą do narysowanej siatki i że kąt  $\varphi$  między igłą i narysowanymi prostymi ma rozkład jednostajny, przy czym kąt  $\varphi$  między igłą i położenie środka igły są niezależne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie jedną z narysowanych prostych.
- 3.12. Zdanie Bertranda** Na okręgu o promieniu  $r$  wybiera się losowo dwa punkty i łączy je cięciwą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że długość cięciwy będzie mniejsza niż  $r\sqrt{3}$ .
- 3.13.** Na odcinku  $[-1, 1]$  wybiera się losowo dwa punkty o współrzędnych  $p$  i  $q$ . Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że równanie kwadratowe  $x^2 + px + q = 0$  będzie mieć rozwiązania rzeczywiste.
- 3.14.** W okrąg wpisany jest kwadrat. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo rzucony w okrąg punkt trafi w kwadrat.
- 3.15.** Odcinek o długości  $a_1 + a_2$  podzielony jest na dwie części o długościach  $a_1$  i  $a_2$  odpowiednio. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie  $m$  spośród  $n$  punktów losowo rzuconych na ten odcinek trafi w część o długości  $a_1$ .
- 3.16.** Na płaszczyźnie narysowana jest szachownica o prostokątnych polach z bokami  $a$  i  $b$ . Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo rzucona na tę szachownicę igła o długości  $2r$  ( $2r < a + b - \sqrt{(a+b)^2 - \pi ab}$ ) przetnie co najmniej jeden z boków któregoś prostokąta.
- 3.17.** W kulę o promieniu  $R$  wrzuca się losowo  $N$  punktów. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że odległość od środka kuli do najbliższego punktu będzie mniejsza niż  $a$ ,  $0 < a < R$ . Obliczyć granicę tego prawdopodobieństwa, gdy  $R \rightarrow \infty$  i  $\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda$ . (Zadanie pochodzi z astronomii; w otoczeniu Słońca  $\lambda = 0.0063$ , jeżeli  $R$  mierzyć w parsekach.)
- 3.18.** Na okręgu wybiera się losowo trzy punkty  $A, B, C$ . Obliczyć prawdopodobieństwo, że trójkąt  $ABC$  będzie ostrokątny.
- 3.19.** Tarcza strzelecka o promieniu  $R$  podzielona jest na trzy koncentryczne pierścienie o promieniach  $R_1 < R_2 < R$  za trafienie w które zdobywa się odpowiednio 1, 2 oraz 3 punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo zdobycia dwóch punktów przy jednym strzale (zakładamy, że strzał trafia w tarczę).
- 3.20.** W kwadracie wybieramy losowo dwa punkty  $A$  i  $B$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że okrąg o średnicy  $AB$  całkowicie leży w kwadracie.