

Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność

4.1. Student przyszedł na egzamin znając odpowiedzi jedynie na 20 pytań spośród 25 przewidzianych programem. Egzaminujący zadał Studentowi trzy pytania. Posługując się pojęciem prawdopodobieństwa warunkowego znaleźć prawdopodobieństwo tego, że Student będzie znał odpowiedzi na wszystkie trzy pytania. Znaleźć to samo prawdopodobieństwo korzystając z określenia klasycznego.

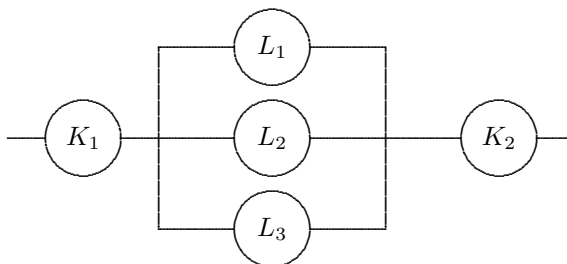
4.2. Na podstawie danych o zużyciu części zamiennych ustalono, że przy remoncie dźwigów samochodowych element 1 wymienia się w 36% przypadków, element 2 — w 42% przypadków, a oba te elementy — w 30% przypadków. Czy można na podstawie tych danych stwierdzić, że wymiany elementu 1 i elementu 2 są ze sobą związane? Obliczyć prawdopodobieństwo, że przy remoncie dźwigu wymienia się element 2, jeżeli wiadomo, że trzeba wymienić element 1.

4.3. Zbadać związek między ciemnym kolorem oczu ojca i syna na podstawie następujących danych otrzymanych przy spisie w Anglii i Walii w 1891 roku. Ciemnoocy ojcowie i synowie stanowili 5% wszystkich badanych; ciemnoocy ojcowie i jasnoocy synowie — 7.9%; jasnoocy ojcowie i ciemnoocy synowie — 8.9% oraz jasnoocy ojcowie i jasnoocy synowie — 78.2%.

4.4. Połączenia elektryczne między punktami A i B sporządzono według schematu wyobrazonego na rysunku. Poszczególne elementy tego układu mogą rozstrajać się niezależnie od siebie. Prawdopodobieństwa rozstrojenia się w ciągu odcinka czasu T wynoszą odpowiednio

element	K_1	K_2	L_1	L_2	L_3
prawdopodobieństwo	0.1	0.2	0.4	0.7	0.5

Obliczyć prawdopodobieństwo przerwania połączenia w ciągu odcinka czasu T .



4.5. W poszukiwaniu pewnej książki Student zdecydował się odwiedzić trzy biblioteki. W każdej z nich szanse znalezienia tej książki są takie same jak szanse jej nie znalezienia. Jeżeli dana książka jest w bibliotece, to jest jednakowo prawdopodobne, że będzie ona wypożyczona, jak też, że będzie dostępna. Co jest bardziej prawdopodobne — dostanie tej książki przez Studenta czy nie, jeżeli wiadomo, że biblioteki zaopatrują się niezależnie jedna od drugiej?

4.6. Strzelec A trafia w cel przy danych warunkach z prawdopodobieństwem $p_1 = 0.6$, strzelec B — z prawdopodobieństwem $p_2 = 0.5$, a strzelec C — z prawdopodobieństwem $p_3 = 0.4$. Strzelcy A B i C oddali salwę i dwie kule trafiły w cel. Co jest bardziej prawdopodobne — że strzelec C trafił w cel, czy nie trafił?

4.7. Wiadomo, że 5% wszystkich mężczyzn i 0.25% wszystkich kobiet jest daltonistami. Wybrana losowo osoba okazała się daltonistą; jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna? (Zakładamy, że ilość kobiet i mężczyzn jest jednakowa.)

4.8. W fabryce produkującej śruby maszyny A , B i C dostarczają odpowiednio 25, 35 i 40 procent całej produkcji. Prawdopodobieństwo wytworzenia braku przez maszyny A , B i C wynoszą odpowiednio 5, 4 i 2 procent. Wybrana losowo śruba okazała się wybrakowana; jakie jest prawdopodobieństwo, że wyprodukowała ją maszyna A ? maszyna B ? maszyna C ?

4.9. Wiadomo, że prawdopodobieństwo, iż bliźnięta są jednej płci wynosi około 0.64, przy czym prawdopodobieństwo urodzenia się chłopca wynosi około 0.51. Znaleźć prawdopodobieństwo, że drugie z bliźniąt jest chłopcem, jeżeli wiadomo, że pierwsze jest chłopcem.

4.10. Prawdopodobieństwo, że dane czasopismo znajduje się na półce wynosi p , przy czym ma ono jednakowe szanse znajdowania się na każdej z ośmiu półek. Przejrzano siedem półek i nie znaleziono czasopisma. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znajdzie się ono na ósmej półce?

4.11. Rzucono trzy kostki do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choćby na jednej z nich wypadnie jedynka, jeżeli wiadomo, że na wszystkich kostkach były różne wyniki?

4.12. Wiadomo, że przy rzucie dziesięcioma kostkami wypadła co najmniej jedna jedynka. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wypadły co najmniej dwie jedynki.

4.13. Pokazać, że jeżeli $P(A) = 0.9$ oraz $P(B) = 0.8$, to $P(A|B) \geq 0.875$.

4.14. Pokazać, że $P(A|B) \geq 1 - \frac{P(A')}{P(B)}$.

4.15. Niech $P(A) = p$, $P(B) = 1 - \varepsilon$, gdzie ε jest małe. Oszacować $P(A|B)$ z góry i z dołu.

4.16. Skonstruować przykład dla pokazania, że warunek

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \quad \text{oraz} \quad P(C) > 0$$

nie pociąga za sobą warunku

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

4.17. Pokazać, że niezależność parami zdarzeń A , B i C nie pociąga za sobą ich niezależności.

4.18. Wiadomo, że zdarzenia A i B są niezależne i rozłączne. Obliczyć $\min(P(A), P(B))$.

4.19. Dane są trzy parami niezależne zdarzenia, które jednakże nie mogą zajść wszystkie jednocześnie. Zakładamy, że mają one to samo prawdopodobieństwo x ; wyznaczyć największe możliwe wartości x .

4.20. Dane jest $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(AB)$, $P(AC)$, $P(BC)$ i $P(ABC)$. Znaleźć $P(C|A'B')$.