Rozkłady skokowe

5.1. Dwóch ludzi rzuca kolejno monetą. Wygrywa ten, kto pierwszy wyrzuci orła, Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych. Obliczyć prawdopodobieństwo p_k, że gra skończy się przy k–tym rzucie. Ile razy większe szanse wygrania ma gracz zaczynający?

5.2. W partii nici bawełnianych znajduje się około 20% krótkich włókien. Jakie jest prawdopodobieństwo nie znalezienia ani jednego krótkiego włókna przy losowym wyborze n włókien?

5.3. W przędzy zmieszano w równych ilościach włókna białe i kolorowe. Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia mniej niż dwóch kolorowych włókien wśród pięciu losowo wybranych?

5.4. Dwóch strzelców o jednakowych umiejętnościach strzela kolejno do tarczy. Każdy z nich ma prawo strzelić co najwyżej dwa razy. Strzelec, który pierwszy trafi w cel otrzymuje nagrodę.
a. Jeżeli prawdopodobieństwo trafienia w cel przy pojedynczym strzale wynosi $p = 0.5$, to czy jest bardziej prawdopodobne, że strzelcy otrzymają nagrodę, czy też, że nikt jej nie otrzyma?
b. Jaki jest stosunek prawdopodobieństw otrzymania nagrody dla obu strzelców, jeżeli $p = 0.5$? Czemu równa się ten stosunek, jeżeli ilość strzałów nie jest ograniczona?

5.5. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem
a. trzy partie z czterech, czy pięć z ośmiu;
b. co najmniej trzy partie z czterech, co najmniej czy pięć z ośmiu;
c. co najwyżej n partii z $2n$, czy więcej niż n spośród $2n$;
d. nie więcej niż n partii z $2n + 1$, czy więcej niż n partii z $2n + 1$.

5.6. *Zadanie Johna Smitha.* W roku 1693 Johnowi Smithowi zadano następujące pytanie: czy trzej ludzie, z których pierwszy chce otrzymać co najmniej jedną szóstkę przy sześciu rzutach kostką, drugi — co najmniej dwie szóstki w dwunastu rzutach, trzeci — co najmniej trzy szóstki w osiemnastu rzutach, mają jednakowe szanse? Zadanie rozwiązał Newton, który pokazał, że pierwszy z tych ludzi ma większe niż drugi, a drugi większe niż trzeci. Otrzymać ten wynik.

5.7. Zakładamy, że kostka ma $s \geq 2$ ścianek, z których każda ma jednakowe szanse wypadnięcia. Oznaczmy przez $g(t, n)$ prawdopodobieństwo, że przy t rzutach kostką dana ścianka wypadnie mniej niż n razy. Udowodnić, że
a. $g(sn, n)$ maleje ze wzrostem s dla ustalonego n;
b. $g(sn, n) < 0.5$;
c. $g(sn, n) \to 0.5$ dla $n \to \infty$.

5.8. Aby oszacować ilość ryb w jeziorze wyławia się 1000 ryb, oznacza je i wypuszcza z powrotem. Dla jakiej ilości ryb w jeziorze prawdopodobieństwo otrzymania wśród 150 nowo złowionych ryb 10 oznaczonych będzie największe?

5.9. Wśród kłębków pewnej partii bawełny znajduje się 30% kolorowych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych kłębków znajdują się trzy kolorowe; co najwyżej trzy kolorowe.

5.10. Kontrola techniczna bada pewne elementy, z których każdy niezależnie od innych może być wadliwy z prawdopodobieństwem p.
a. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spośród 10 zbadanych elementów tylko jeden będzie wadliwy.
b. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pierwszym napotkanym elementem wadliwym będzie k–ty element zbadany ($k = 3$).
c. Obliczyć prawdopodobieństwo, że $k = 10$ kolejnych elementów nie będzie miało wad, jeżeli wiadomo, że poprzednie $l = 5$ elementów również nie miało wad. Czy to prawdopodobieństwo zależy od l?
d. Znaleźć rozkład ilości dobrych elementów zbadanych pomiędzy dwoma kolejnymi znalezionymi elementami wadliwymi.

5.11. Dwóch ludzi gra w następującą grę: pierwszy z nich kolejno pisze zero lub jedynkę, a drugi stara się zgadnąć co napisał pierwszy. Drugi z graczy spostrzegł, że pierwszy pisze kolejno cyfry niezależnie jedną od drugiej i że prawdopodobieństwo napisania prze niego zera wynosi $p = 0.6$. Jak powinna wyglądać strategia drugiego gracza, tzn. z jakim prawdopodobieństwem powinien on nazywać kolejne liczby, aby osiągnąć możliwie największą liczbę odgadnięć? Obliczyć rozkład ilości liczb odgadniętych pomiędzy dwoma kolejnymi liczbami nieodgadniętymi przy założeniu, że drugi gracz wymienia zero w prawdopodobieństwem $q = 0.5$ niezależnie od wyników poprzednich odgadnięć.

5.12. Na odcinek AB rzucamy losowo pięć punktów, niezależnie jeden od drugiego. Prawdopodobieństwo, że punkt wpadnie w daną część odcinka zależy jedynie od długości tej części i jest do niej proporcjonalne. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
a. dwa punkty znajdą się w odległości mniejszej niż b od punktu A, a trzy w odległości większej niż b;
b. dwa punkty znajdą się w odległości mniejszej niż a od punktu A, jeden w odległości $a < r < b$ od punktu A, dwa w odległości większej niż b od punktu A.

5.13. W koło wpisano kwadrat.
a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo rzucony na koło punkt znajdzie się wewnątrz kwadratu?
b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród 10 niezależnie od siebie losowo rzuconych na to koło punktów cztery znajdą się wewnątrz kwadratu, trzy w jednym z odciętych bokiem kwadratu kawałków koła, a trzy w pozostałych trzech odciętych kawałkach tarczy koła?

5.14. Prawdopodobieństwo, że zamaskowany przeciwnik znajduje się w ostrzeliwanym obszarze wynosi 0.3; prawdopodobieństwo trafienia w ten obszar przy każdym pojedynczym strzale wynosi 0.2. Dla unieszkodliwienia przeciwnika wystarcza jedno trafienie. Jak jest szansa unieszkodliwienia przeciwnika przy dwóch strzałach? przy dziesięciu strzałach?

5.15. Dwa kluby sportowe A i B wystawiają każdy po trzy drużyny. Prawdopodobieństwo zwycięstwa drużyn klubu A na odpowiednimi drużynami klubu B wynoszą odpowiednio 0.8 dla pierwszych drużyn, 0.4 dla drugich i 0.4 dla trzecich drużyn. Dla wygrania meczu potrzeba zwycięstw co najmniej dwóch drużyn. Który z klubów ma większe szanse wygrania meczu?

5.16. Dwaj szachiści A i B decydują się rozegrać mecz na następujących warunkach: A musi dla zwycięstwa zdobyć 12 punktów (1 punkt za każdą wygrana partię), a B dla zwycięstwa musi zdobyć 6 punktów, przy czym partii remisowych nie uwzględnia się. Zazwyczaj A wygrywa z B dwa razy częściej niż B z A, jeżeli rozpatrywać tylko partie, które nie skończyły się remisem, tak że prawdopodobieństwo wygrania przez niego partii można przyjąć za równe $\frac{1}{3}$. Z pewnych względów konieczne było przerwanie meczu w momencie, gdy A miał już 8 punktów, a B — 4 punkty. Postanowiono przyznać zwycięstwo graczowi, który ma większe szanse wygrania całości meczu. Który z graczy wygrał?

5.17. Niech A_k oznacza zdarzenie polegające na tym, że przy sprawdzaniu k elementów podlegających kontroli nie znaleziono ani jednej sztuki wadliwej. Wiadomo, że dla dowolnych całkowitych k i $l \geq 0$ jest

$$P(A_{k+l}|A_k) = P(A_l), \qquad \text{przy czym} \qquad P(A_1) = 1 - q.$$

Znaleźć $P(A_k)$. Obliczyć też prawdopodobieństwo, że ilość sztuk dobrych zbadanych aż do chwili znalezienia pierwszej sztuki wadliwej wynosi l.

5.18. Urna zawiera jedną kulę białą i jedną kulę czarną. Przeprowadzamy kolejne ciągnienie, za każdym razem zwracając wyciągniętą kulę do urny. Ilość losowań jest nieograniczona.
a. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania choćby raz białej kuli, jeżeli za każdym razem, gdy wyciągamy kulę czarną, dokładamy do urny jeszcze a kul czarnych?
b. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia choćby raz dwukrotnie z rzędu białej kuli, jeżeli po każdej kuli czarnej dokładamy do urny jeszcze jedną kulę czarną?
c. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia choćby raz dwukrotnie z rzędu białej kuli, jeżeli po każdej kuli czarnej dokładamy do urny jeszcze dwie kule czarne?

5.19. Używając argumentów probabilistycznych sprawdzić następujące tożsamości, w których $N \geq n \geq 1$:
a. $1 + \frac{N-m}{N-1} + \frac{(N-m)(N-m-1)}{(N-1)(N-2)} + \cdots + \frac{(N-m)\cdots 2\cdot 1}{(N-1)\cdots(m+1)m} = \frac{N}{m}$;
b. $1 + \frac{N-m}{N-1} \cdots \frac{m+1}{m} + \frac{(N-m)(N-m-1)}{N^2} \cdots \frac{m+2}{m} + \cdots + \frac{(N-m)\cdots 2\cdot 1}{N^{N-m}} \frac{N}{m} = \frac{N}{m}$;
c. $1 + \frac{N-m}{N+1} \cdots \frac{m+1}{m} + \frac{(N-m)^2}{(N+1)(N+2)} \cdots \frac{m+2}{m} + \frac{(N-m)^3}{(N+1)(N+2)(N+3)} \frac{m+3}{m} + \cdots = \frac{N}{m}$;