

## Prawdopodobieństwo całkowite

**6.1.** Spośród 64 pól szachownicy wybieramy losowo dwa różne pola i ustawiamy na nich dwie jednakowe figury: białą i czarną. Obliczyć prawdopodobieństwo, że figury te nie będą zagrażały sobie wzajemnie, jeżeli ustawiono

- a. dwa hetmany;
- b. dwa gońce;
- c. dwa skoczki;
- d. dwie wieże.

**6.2.** Z urny zawierającej trzy kule białe i dwie kule czarne przełożono dwie wyciągnięte losowo kule do urny zawierającej cztery białe i cztery czarne kule. Obliczyć prawdopodobieństwo wyciągnięcia białej kuli z drugiej urny.

**6.3.** W trzech urnach znajdują białe i czarne kule. W pierwszej z nich są dwie kule białe i trzy czarne, w drugiej dwie białe i dwie czarne, a w trzeciej trzy białe i jedna czarna. Przekładamy wylosowaną kulę z pierwszej urny do drugiej, a następnie losowo wybraną kulę z drugiej urny do trzeciej. Wreszcie wybraną losowo kulę przekładamy z urny trzeciej do pierwszej.

- a. Jaki skład pierwszej urny jest najbardziej prawdopodobny?
- b. Obliczyć prawdopodobieństwo, że skład wszystkich trzech urn pozostanie niezmienny.

**6.4.** Pewien Student nie zna odpowiedzi na niektóre z pytań na kartkach egzaminacyjnych. W jakim przypadku szansa wyciągnięcia przez niego kartki z pytaniem, na które nie zna odpowiedzi będzie najmniejsza: jeżeli losuje pierwszy, czy jeżeli losuje ostatni.

**6.5.** Prawdopodobieństwo, że wyroby pewnej fabryki spełniają wymagane normy wynosi 0.96. Zakładamy uproszczony system sprawdzania, który daje rezultat dodatni z prawdopodobieństwem 0.98 dla sztuk dobrych i z prawdopodobieństwem 0.05 dla sztuk wadliwych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sztuka uznana za dobrą przez kontrolę rzeczywiście spełnia wymagania normy?

**6.6.** Załóżmy, że prawdopodobieństwo trafienia w cel przy pojedynczym strzale wynosi  $p$ , a prawdopodobieństwo zniszczenia celu przy  $k \geq 1$  trafieniach wynosi  $1 - q^k$ . Jakie jest prawdopodobieństwo zniszczenia celu, jeżeli oddano  $n$  strzałów.

**6.7.** W partii towaru złożonej z  $N$  sztuk znajduje się  $M < N$  wadliwych. Wybrano losowo  $n < N$  sztuk, które poddano pobieżnej kontroli. Kontrola ta może popełnić błędy: z prawdopodobieństwem  $p$  może się zdarzyć, że wadliwą sztukę uzna się za „dobrą”, a z prawdopodobieństwem  $q$  dobrą sztukę uzna się za „wadliwą”. Obliczyć prawdopodobieństwo, że  $m$  sztuk zostanie uznanych za wadliwe.

**6.8.** Niech  $X$  będzie zmienną losową przyjmującą wartości całkowite, przy czym  $X = k$  z prawdopodobieństwem  $\frac{\lambda^k}{k} e^{-\lambda}$ , gdzie  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Doświadczenie polega na tym, że na odcinek  $[0, 1]$  rzucamy losowo  $X$  punktów. Oznaczmy przez  $X_i$  ilość punktów, które znajdują się w odcinku  $[(i-1)/n, i/n]$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ . Udowodnić, że dla  $\lambda = n$  zmienne losowe  $X_i$  są niezależne.

**6.9.** Przypuśćmy, że pewien owad składa  $k$  jajeczek z prawdopodobieństwem  $\frac{\lambda^k}{k} e^{-\lambda}$ , a każde z jajeczek wylęga się z prawdopodobieństwem  $p$ . Zakładając wzajemną niezależność wylęgania się jaj znaleźć prawdopodobieństwo, że ilość potomków danego owada wyniesie dokładnie  $l$ .

**6.10.** Doświadczenie  $\mathfrak{A}$  może dać w wyniku  $M$  wyłączających się rezultatów  $A_m$ , a doświadczenie  $\mathfrak{B}$  —  $N$  wyłączających się wyników  $B_n$ . Udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe  $P(B_n|A_m)$  można wyrazić przez prawdopodobieństwa  $P(A_m|B_n)$  i  $P(B_n)$  w następujący sposób:

$$P(B_n|A_m) = \frac{P(A_m|B_n)P(B_n)}{\sum_{k=1}^N P(A_m|B_k)P(B_k)}.$$

Wzór ten znany jest pod nazwą wzoru Bayesa.

**6.11.** Z urny zawierającej  $m \geq 3$  kul białych i  $n$  kul czarnych zgubiono jedną kulę nieznanego koloru. Aby określić skład urny wybrano z niej losowo trzy kule. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zgubiona kula była biała, jeżeli wiadomo, że wszystkie wybrane kule są białe.

**6.12.** Prawdopodobieństwo wyłączających się i wyczerpujących wszystkie możliwości hipotez  $A_1, A_2, \dots, A_k$  przed nastąpieniem zdarzenia  $B$  wynoszą odpowiednio  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , prawdopodobieństwa zdarzenia  $B$  odpowiadające danym hipotezom wynoszą  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Wiadomo, że w  $n_1$  niezależnych doświadczeniach zdarzenie  $b$  nastąpiło  $m_1$  razy. Wiadomo też, że w następnej serii złożonej z  $n_2$  doświadczeń zdarzenie  $B$  nastąpiło w  $m_2$  razy. Udowodnić, następującą własność wzoru Bayesa:

Prawdopodobieństwo *a posteriori* hipotez obliczone po drugiej serii doświadczeń przy przyjęciu jako prawdopodobieństwa *a priori* odpowiednich prawdopodobieństw *a posteriori* po pierwszej serii doświadczeń równe są zawsze prawdopodobieństwom *a posteriori* obliczonym po prostu dla serii  $n_1 + n_2$  doświadczeń, w których zdarzenie  $B$  zaszło  $m_1 + m_2$  razy.

**6.13.** Przez kanał łączności można przekazać jedną z następujących serii liter:  $AAAA, BBBB, CCCC$ , przy czym odpowiednie prawdopodobieństwa *a priori* wynoszą 0.3, 0.4, 0.3. Wiadomo, że działanie szumów zmniejsza prawdopodobieństwo poprawnego odebrania nadanej litery do 0.6, a prawdopodobieństwo odebrania każdej z dwóch innych liter wynosi po 0.2. Zakładamy, że litery przekazywane są niezależnie od siebie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przekazano ciąg  $AAAA$ , jeżeli odebrano ciąg  $ABCA$ .

**6.14.** Prawdopodobieństwo, że cząsteczka, która w chwili  $t = 0$  zderzyła się z inną cząsteczką i do chwili  $t$  nie uległa żadnym innym zderzeniom, ulegnie zderzeniu w ciągu odcinka czasu od  $t$  do  $t + \Delta t$ , wynosi  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ . Znaleźć prawdopodobieństwo, że czas wolnego przebiegu (tzn. okres między dwoma kolejnymi zderzeniami) będzie większy niż  $t$ .

**6.15.** Zakładamy, że przy rozmnażaniu się bakterii przez podział (na dwie bakterie) prawdopodobieństwo podziału w ciągu odcinka czasu o długości  $\Delta t$  wynosi  $a\Delta t + o(\Delta t)$  i nie zależy od ilości bakterii w koloni ani od ilości poprzedzających podziałów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jeżeli w chwili  $t = 0$  kolonia składa się z jednej bakterii, to w chwili  $t$  będzie ona zawierać  $i$  bakterii.

**6.16.** Załóżmy dodatkowo (do warunków poprzedniego zadania), że w ciągu odcinka czasu o długości  $\Delta t$  każda z bakterii niezależnie od ogólnej ilości bakterii może umrzeć z prawdopodobieństwem  $b\Delta t + o(\Delta t)$ . Wyprowadzić równanie różniczkowe dla funkcji  $p_r(t)$ , gdzie  $p_r(t)$  oznacza prawdopodobieństwo, że w chwili  $t$  kolonia ma  $r$  bakterii.

**6.17.** Do przewodu elektrycznego podłączono  $n$  urządzeń. Prawdopodobieństwo, że urządzenie, które w chwili  $t$  używało energię elektryczną przestanie jej używać do chwili  $t + \Delta t$  wynosi  $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ . Jeżeli w chwili  $t$  urządzenie nie zużywało energii, to prawdopodobieństwo, że zacznie jej używać do chwili  $t + \Delta t$  wynosi  $\beta\Delta t + o(\Delta t)$ , niezależnie od pracy innych urządzeń. Ułożyć równanie różniczkowe dla funkcji  $P_r(t)$ , gdzie  $P_r(t)$  oznacza prawdopodobieństwo, że w chwili  $t$  dokładnie  $r$  urządzeń zużywa energię elektryczną. Znaleźć stacjonarne rozwiązanie tego układu równań.

**6.18.** Dwaj gracze  $A$  i  $B$  posiadający początkowo kapitały odpowiednio  $a$  i  $b$  grają w grę hazardową składającą się z oddzielnych partii. W każdej z partii pierwszy z graczy wygrywa z prawdopodobieństwem 0.5 i przegrywa z prawdopodobieństwem 0.5. Wypłata odbywa się po każdej partii i wynosi 1, przy czym gra toczy się tak długo, aż jeden z graczy nie zostanie zruinowany. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny drugiego gracza.

Rozwiązać to zadanie w przypadku, gdy pierwszy gracz wygrywa z prawdopodobieństwem  $p > 0.5$  i przegrywa z prawdopodobieństwem  $q = 1 - p$ .

**6.19.** Znaleźć liczbę  $\beta$  o tej własności, żeby przy rzucaniu kostką do gry prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na wyrzuceniu serii trzech kolejnych jedynek przed serią  $\beta$  kolejnych nie-jedynek było w przybliżeniu równe 0.5. (Wskazówka. Wprowadzić prawdopodobieństwa warunkowe  $u$  i  $v$  zdarzenia  $A$  przy warunku, że wynikiem pierwszego rzutu były odpowiednio jedynka i nie-jedynka. Używając wzoru na prawdopodobieństwo całkowite ułożyć równanie wiążące  $u$  i  $v$ .)

**6.20.** Rozpatrzmy ciąg niezależnych doświadczeń, z których każde może dać trzy możliwe wyniki  $A, B, C$  z odpowiednimi prawdopodobieństwami  $p, q, r$  ( $p + q + r = 1$ ). Obliczyć prawdopodobieństwo, że

- seria wyników  $A$  o długości  $\alpha$  pojawi się wcześniej niż seria wyników  $B$  o długości  $\beta$ ;
- seria wyników  $A$  o długości  $\alpha$  pojawi się wcześniej niż seria wyników  $B$  o długości  $\beta$  lub seria wyników  $C$  o długości  $\gamma$ .