Wartość oczekiwana i wariancja

7.1. Dwóch ludzi rzuca kolejno monetą. Wygrywa ten, kto pierwszy wyrzuci orła, Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych. Obliczyć prawdopodobieństwo p_k, że gra skończy się przy k–tym rzucie. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję ilości rzutów moneta.

7.2. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym $EX = 2$, $D^2X = 1$, $EY = 1$, $D^2Y = 4$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję
a. $Z_1 = X - 2Y$;
b. $Z_2 = 2X - Y$.

7.3. Załóżmy, że jeziorze jest 15000 ryb, z których 1000 było zaobrączkowanych. Wyłowiono z jeziora 100 ryb. Znaleźć wartość oczekiwaną ilości ryb znaczonych wśród połowu.

7.4. Dla rzutu n kostkami do gry wyznaczyć wartość oczekiwaną, wariancję i moment rzędu trzeciego sumy oczek na wszystkich kostkach.

7.5. Właściciel miesięcznego biletu kolejowego wychodzi zazwyczaj z domu między godziną 7^{30} a 8^{00} rano; dojście do stacji zajmuje mu od 20 do 30 minut. Zakładamy, że moment wyjścia z domu i czas zużyty na dojście do stacji są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie jednostajnym w odpowiednich przedziałach. Sa dwa pociągi, którymi może on dojechać do pracy: jeden o 8^{05}, który jedzie 35 minut, i drugi o 8^{25}, który jedzie 30 minut. Zakładając, że pojedzie on jednym z tych pociągów, wyznaczyć wartość oczekiwaną czasu jego przyjazdu na stację przeznaczenia. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spóźni się na oba pociągi?

7.6. Kontrola techniczna bada pewne elementy, z których każdy niezależnie od innych może być wadliwy z prawdopodobieństwem p. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję ilości sztuk wadliwych wśród n kontrolowanych. Znaleźć wartość oczekiwaną ilości sztuk dobrych pomiędzy dwoma kolejnymi sztukami wadliwymi.

7.7. Rzucamy dwie kostki do gry. Znaleźć wartość oczekiwaną sumy oczek, jeżeli wiadomo, że wypadły dwie jednakowe ścianki.

7.8. Średnicę koła zmierzono w przybliżeniu. Zakładając, że wynik pomiaru ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$, znaleźć rozkład prawdopodobieństwa otrzymanej powierzchni koła, jej średnią i wariancję.

7.9. Gęstość rozkładu wartości bezwzględnej prędkości ruchu cząsteczek ma postać

$$p(s) = 4\sqrt{a^3\pi^{-1}s^2\exp(-as^2)}$$

(wielkość a można wyrazić przez temperaturę gazu i masę rozważanej cząsteczki: $a = m/2kT$, gdzie k jest stałą Boltzmana).
a. Znaleźć średnią długość drogi przebytej przez cząsteczkę w jednostce czasu (oczekiwany przebieg cząsteczki).
b. Znaleźć wartość oczekiwaną energii kinetycznej cząsteczki (tzn. „energię średnią” cząsteczki).

7.10. Wiadomo, że prawdopodobieństwo rozstrojenia się lampy elektronowej, która przepracowała już x dni, wynosi $0.003\Delta + o(\Delta)$ dla następnych Δ dni, niezależnie od x (przypominamy, że symbol $o(\Delta)$ oznacza wielkość zmierzającą do zera, gdy $\Delta \to 0$). Po roku lampę wymienia się nawet jeżeli nie ulegnie ona jeszcze rozstrojeniu. Znaleźć wartość oczekiwaną długości pracy lampy.

7.11. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X i Y przyjmujących wartości całkowite dany jest za pomocą tablicy

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$Y=0$	0.01	0.05	0.12	0.02	0.00	0.01
$Y=1$	0.02	0.00	0.01	0.05	0.02	0.02
$Y=2$	0.00	0.05	0.10	0.00	0.30	0.05
$Y=3$	0.01	0.00	0.02	0.01	0.03	0.10

Obliczyć

$$P\{X=2|Y=3\},\ E(X|Y=1),\ E(X+Y),\ E(X^2|Y\le 1),\ P\{X+Y\le 5|Y\le 2\},\ E(XY|Y\le 1).$$

7.12. Udowodnić, że jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, mają jednakowy rozkład i przyjmują jedynie wartości dodatnie, to

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}\right) = \frac{k}{n}, \quad \text{dla } k < n.$$

7.13. Zmienna losowa X przyjmuje wartości całkowite dodatnie. Udowodnić, że

$$EX = \sum_{m \geq 1} P\{X = m\}, \quad D^2X = 2\sum_{m \geq 1} mP\{X = m\} - EX(EX + 1).$$

7.14. Niech $D^2(X|A) = E((X - E(X|A))^2|A)$. Pokazać, że $D^2(X|A) = E((X - EX)^2|A) - (E(X|A) - EX)^2$.

7.15. Załóżmy, że zmienna losowa X przyjmuje z prawdopodobieństwem p_i wartość tę samą co zmienna X_i i niech $EX_i = m_i$. Udowodnić, że

$$D^2X = \sum_k p_k D^2 X_k + D^2\mu,$$

gdzie μ przyjmuje wartości m_i z prawdopodobieństwem p_i.

7.16. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję iloczynu dwóch niezależnych losowych X i Y o rozkładach jednostajnych: X na odcinku $[0, 1]$, a Y na odcinku $[1, 3]$.

7.17. Udowodnić, że jeżeli X i Y są niezależne, to

$$D^2(XY) = D^2XD^2Y + (EX)^2D^2Y + (EY)^2D^2X, \quad \text{tzn.} \quad D^2(XY) \geq D^2XD^2Y.$$

7.18. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, z których każda przyjmuje z prawdopodobieństwem p wartość 1 i z prawdopodobieństwem $1 - p$ wartość 0. Niech $Y_i = 0$, jeżeli $X_i + X_{i+1}$ jest liczbą parzystą, i $Y_i = 1$, jeżeli $X_i + X_{i+1} = 1$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$.

7.19. Wielka ilość N ludzi podlega badaniom krwi. Badanie to można przeprowadzić dwoma sposobami.
1. Krew każdego osobnika bada się oddzielnie; w tym przypadku potrzeba N analiz;
2. Krew k osobników miesza się razem i analizuje się otrzymaną mieszaninę. Jeżeli wynik tej analizy jest ujemny, to wystarcza ona dla k ludzi. Jeżeli wynik jest dodatni, to bada się oddzielnie tych k ludzi; w tym przypadku potrzeba $k + 1$ analiz. Zakładamy, że prawdopodobieństwo dodatniego wyniku analizy jest takie samo dla wszystkich osobników i że wyniki analiz są wzajemnie niezależne w sensie probabilistycznym.
a. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wynik analizy mieszanki krwi k osobników będzie dodatni.
b. Obliczyć wartość oczekiwaną ilości X analiz dla drugiej metody.
c. Dla jakiej wartości k wartość oczekiwana ilości niezbędnych analiz osiąga minimum?

7.20. Miasto zostało podzielone na n kwadratów, przy czym w n_j spośród nich mieszka x_j mieszkańców $(n_1 + n_2 + \cdots = n)$. Niech $m = \sum_{j=1}^n \frac{n_j x_j}{n}$ oznacza średnią ilość mieszkańców przypadających na kwadrat oraz niech $\sigma^2 = \sum_{j=1}^n \frac{n_j x_j^2}{n} - m^2$. Za pomocą losowania bez zwracania wybrano r kwadratów i w każdym z nich obliczono ilość mieszkańców. Oznaczmy przez $X_1, X_2, \ldots, X_r$ odpowiednie wyniki. Udowodnić, że
a. $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) = mr$.
b. $D^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) = \dfrac{\sigma^2 r(n - r)}{n - 1}$.

7.21. Ilość mieszkańców miasta ocenia się za pomocą następującego schematu podwójnego losowania. Miasto dzieli się na n rejonów; ilość kwadratów w j–tym rejonie jest znana i wynosi n_j, tak że $n = \sum n_j$ jest całkowitą ilością kwadratów w mieście. Nieznaną ilość mieszkańców w k–tym kwadracie j–tego rejonu oznaczmy przez x_{jk} (tak że $x_j = \sum x_{jk}$ jest ilością mieszkańców j–tego rejonu, a $x = \sum x_j$ jest ilością mieszkańców miasta). Z j–tego rejonu wybieramy losowo r_j kwadratów i obliczamy ilość ludzi w każdym z nich. Niech X_{jk} oznacza ilość ludzi w k–tym spośród wybranych kwadratów z j–tego rejonu. Wówczas $X_j = \sum X_{jk}$ jest łączną ilością ludzi mieszkających w wybranych kwadratach j–tego rejonu. Niech $X = \sum_j \frac{n_j}{r_j} X_j$. Udowodnić, stosując wyniki poprzedniego zadania, że
a. $EX = x$;
b. $D^2X = \sum \sigma_j^2 n_j(n_j - r_j)\dfrac{1}{r_j(n_j - 1)}$, gdzie $\sigma_j^2 = \dfrac{1}{n_j}\sum_k n_{jk}\left(x_{jk} - \dfrac{x_j}{n_j}\right)^2$.