

## Wartość oczekiwana i wariancja

**7.1.** Dwóch ludzi rzuca kolejno monetą. Wygrywa ten, kto pierwszy wyrzuci orła, Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych. Obliczyć prawdopodobieństwo  $p_k$ , że gra skończy się przy  $k$ -tym rzucie. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję ilości rzutów moneta.

**7.2.** Zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne, przy czym  $EX = 2$ ,  $D^2X = 1$ ,  $EY = 1$ ,  $D^2Y = 4$ . Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję

a.  $Z_1 = X - 2Y$ ;

b.  $Z_2 = 2X - Y$ .

**7.3.** Załóżmy, że jeziorze jest 15000 ryb, z których 1000 było zaobrączkowanych. Wyłowiono z jeziora 100 ryb. Znaleźć wartość oczekiwaną ilości ryb znaczonych wśród połowu.

**7.4.** Dla rzutu  $n$  kostkami do gry wyznaczyć wartość oczekiwaną, wariancję i moment rzędu trzeciego sumy oczek na wszystkich kostkach.

**7.5.** Właściciel miesięcznego biletu kolejowego wychodzi zazwyczaj z domu między godziną  $7^{30}$  a  $8^{00}$  rano; dojeżdżenie do stacji zajmuje mu od 20 do 30 minut. Zakładamy, że moment wyjścia z domu i czas zużyty na dojeżdżenie do stacji są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie jednostajnym w odpowiednich przedziałach. Są dwa pociągi, którymi może on dojechać do pracy: jeden o  $8^{05}$ , który jedzie 35 minut, i drugi o  $8^{25}$ , który jedzie 30 minut. Zakładając, że pojedzie on jednym z tych pociągów, wyznaczyć wartość oczekiwaną czasu jego przyjazdu na stację przeznaczenia. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spóźni się na oba pociągi?

**7.6.** Kontrola techniczna bada pewne elementy, z których każdy niezależnie od innych może być wadliwy z prawdopodobieństwem  $p$ . Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję ilości sztuk wadliwych wśród  $n$  kontrolowanych. Znaleźć wartość oczekiwaną ilości sztuk dobrych pomiędzy dwoma kolejnymi sztukami wadliwymi.

**7.7.** Rzucamy dwie kostki do gry. Znaleźć wartość oczekiwaną sumy oczek, jeżeli wiadomo, że wypadły dwie jednakowe ścianki.

**7.8.** Średnicę koła zmierzono w przybliżeniu. Zakładając, że wynik pomiaru ma rozkład jednostajny na odcinku  $[a, b]$ , znaleźć rozkład prawdopodobieństwa otrzymanej powierzchni koła, jej średnią i wariancję.

**7.9.** Gęstość rozkładu wartości bezwzględnej prędkości ruchu cząsteczek ma postać

$$p(s) = 4\sqrt{a^3\pi^{-1}s^2 \exp(-as^2)}$$

(wielkość  $a$  można wyrazić przez temperaturę gazu i masę rozważanej cząsteczki:  $a = m/2kT$ , gdzie  $k$  jest stałą Boltzmana).

a. Znaleźć średnią długość drogi przebytej przez cząsteczkę w jednostce czasu (oczekiwany przebieg cząsteczki).

b. Znaleźć wartość oczekiwaną energii kinetycznej cząsteczki (tzn. „energię średnią” cząsteczki).

**7.10.** Wiadomo, że prawdopodobieństwo rozstrojenia się lampy elektronowej, która przepracowała już  $x$  dni, wynosi  $0.003\Delta + o(\Delta)$  dla następnych  $\Delta$  dni, niezależnie od  $x$  (przypominamy, że symbol  $o(\Delta)$  oznacza wielkość zbiegającą do zera, gdy  $\Delta \rightarrow 0$ ). Po roku lampę wymienia się nawet jeżeli nie ulegnie ona jeszcze rozstrojeniu. Znaleźć wartość oczekiwaną długości pracy lampy.

**7.11.** Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  przyjmujących wartości całkowite dany jest za pomocą tablicy

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = 0$	0.01	0.05	0.12	0.02	0.00	0.01
$Y = 1$	0.02	0.00	0.01	0.05	0.02	0.02
$Y = 2$	0.00	0.05	0.10	0.00	0.30	0.05
$Y = 3$	0.01	0.00	0.02	0.01	0.03	0.10

Obliczyć

$$P\{X = 2|Y = 3\}, E(X|Y = 1), E(X + Y), E(X^2|Y \leq 1), P\{X + Y \leq 5|Y \leq 2\}, E(XY|Y \leq 1).$$

**7.12.** Udowodnić, że jeżeli  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależne, mają jednakowy rozkład i przyjmują jedynie wartości dodatnie, to

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right) = \frac{k}{n}, \quad \text{dla } k < n.$$

**7.13.** Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości całkowite dodatnie. Udowodnić, że

$$EX = \sum_{m \geq 1} P\{X = m\}, \quad D^2X = 2 \sum_{m \geq 1} mP\{X = m\} - EX(EX + 1).$$

**7.14.** Niech  $D^2(X|A) = E((X - E(X|A))^2|A)$ . Pokazać, że  $D^2(X|A) = E((X - EX)^2|A) - (E(X|A) - EX)^2$ .

**7.15.** Załóżmy, że zmienna losowa  $X$  przyjmuje z prawdopodobieństwem  $p_i$  wartość tę samą co zmienna  $X_i$  i niech  $EX_i = m_i$ . Udowodnić, że

$$D^2X = \sum_k p_k D^2X_k + D^2\mu,$$

gdzie  $\mu$  przyjmuje wartości  $m_i$  z prawdopodobieństwem  $p_i$ .

**7.16.** Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję iloczynu dwóch niezależnych losowych  $X$  i  $Y$  o rozkładach jednostajnych:  $X$  na odcinku  $[0, 1]$ , a  $Y$  na odcinku  $[1, 3]$ .

**7.17.** Udowodnić, że jeżeli  $X$  i  $Y$  są niezależne, to

$$D^2(XY) = D^2XD^2Y + (EX)^2D^2Y + (EY)^2D^2X, \quad \text{tzn. } D^2(XY) \geq D^2XD^2Y.$$

**7.18.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, z których każda przyjmuje z prawdopodobieństwem  $p$  wartość 1 i z prawdopodobieństwem  $1 - p$  wartość 0. Niech  $Y_i = 0$ , jeżeli  $X_i + X_{i+1}$  jest liczbą parzystą, i  $Y_i = 1$ , jeżeli  $X_i + X_{i+1} = 1$ . Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej  $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ .

**7.19.** Wielka ilość  $N$  ludzi podlega badaniom krwi. Badanie to można przeprowadzić dwoma sposobami.

1. Krew każdego osobnika bada się oddzielnie; w tym przypadku potrzeba  $N$  analiz;
  2. Krew  $k$  osobników miesza się razem i analizuje się otrzymaną mieszaninę. Jeżeli wynik tej analizy jest ujemny, to wystarcza ona dla  $k$  ludzi. Jeżeli wynik jest dodatni, to bada się oddzielnie tych  $k$  ludzi; w tym przypadku potrzeba  $k + 1$  analiz. Zakładamy, że prawdopodobieństwo dodatniego wyniku analizy jest takie samo dla wszystkich osobników i że wyniki analiz są wzajemnie niezależne w sensie probabilistycznym.
- a. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wynik analizy mieszanki krwi  $k$  osobników będzie dodatni.
  - b. Obliczyć wartość oczekiwaną ilości  $X$  analiz dla drugiej metody.
  - c. Dla jakiej wartości  $k$  wartość oczekiwana ilości niezbędnych analiz osiąga minimum?

**7.20.** Miasto zostało podzielone na  $n$  kwadratów, przy czym w  $n_j$  spośród nich mieszka  $x_j$  mieszkańców ( $n_1 + n_2 + \dots = n$ ). Niech  $m = \sum_{j=1}^n \frac{n_j x_j}{n}$  oznacza średnią ilość mieszkańców przypadających na kwadrat oraz niech  $\sigma^2 = \sum_{j=1}^n \frac{n_j x_j^2}{n} - m^2$ . Za pomocą losowania bez zwracania wybrano  $r$  kwadratów i w każdym z nich obliczono ilość mieszkańców. Oznaczmy przez  $X_1, X_2, \dots, X_r$  odpowiednie wyniki. Udowodnić, że

- a.  $E(X_1 + X_2 + \dots + X_r) = mr$ .
- b.  $D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_r) = \frac{\sigma^2 r(n - r)}{n - 1}$ .

**7.21.** Ilość mieszkańców miasta ocenia się za pomocą następującego schematu podwójnego losowania. Miasto dzieli się na  $n$  rejonów; ilość kwadratów w  $j$ -tym rejonie jest znana i wynosi  $n_j$ , tak że  $n = \sum n_j$  jest całkowitą ilością kwadratów w mieście. Nieznaną ilość mieszkańców w  $k$ -tym kwadracie  $j$ -tego rejonu oznaczmy przez  $x_{jk}$  (tak że  $x_j = \sum x_{jk}$  jest ilością mieszkańców  $j$ -tego rejonu, a  $x = \sum x_j$  jest ilością mieszkańców miasta). Z  $j$ -tego rejonu wybieramy losowo  $r_j$  kwadratów i obliczamy ilość ludzi w każdym z nich. Niech  $X_{jk}$  oznacza ilość ludzi w  $k$ -tym spośród wybranych kwadratów z  $j$ -tego rejonu. Wówczas  $X_j = \sum X_{jk}$  jest łączną ilością ludzi mieszkających w wybranych kwadratach  $j$ -tego rejonu. Niech  $X = \sum_j \frac{n_j}{r_j} X_j$ . Udowodnić, stosując wyniki poprzedniego zadania, że

- a.  $EX = x$ ;
- b.  $D^2X = \sum \sigma_j^2 n_j (n_j - r_j) \frac{1}{r_j (n_j - 1)}$ , gdzie  $\sigma_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_k n_{jk} \left(x_{jk} - \frac{x_j}{n_j}\right)^2$ .