Rozkłady prawdopodobieństwa

8.1. Niech $p(x)$ będzie gęstością zmiennej losowej X. W określeniu tej gęstości występuje stała C. Znaleźć tę stałą w przypadku, gdy

a. $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ Ce^{-x}, & \text{dla } x \geq 0; \end{cases}$

b. $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ Cx^{\alpha}e^{-\beta x}, & \text{dla } x \geq 0 \ (\alpha > 0, \beta > 0); \end{cases}$

c. $p(x) = C(1 + x^2)^{-1}$.

8.2. Dla danej linii tramwajowej prowadzącej od punktu O do punktu L znana jest funkcja $F(a, b)$ wyrażająca prawdopodobieństwo, że pasażer jadący tą linią tramwajową wsiada w punkcie $x < a$ i jedzie do punktu $y \leq b$. Należy wyznaczyć:

a. gęstość względną natężenia ruchu, mianowicie funkcje $\varphi(z)$ przedstawiającą prawdopodobieństwo, że pasażer jadący daną linią przejedzie przez punkt z;

b. prawdopodobieństwo $\varphi_1(z)$, że wsiadł on przed punktem z;

c. prawdopodobieństwo $\varphi_2(z)$, że wysiadł on nie później niż w z;

Zakładając, że wprowadzone funkcje są ciągłe i różniczkowalne znaleźć zależność między nimi i funkcją $p(x, b)$ wyrażającą gęstość prawdopodobieństwa dla pasażera, który wsiadł w punkcie x, a wysiadł z tramwaju w punkcie $b > x$.

8.3. Pewna ilość dokładnie sferycznych piłeczek wykonanych z jednorodnego materiału po uszeregowaniu według średnic ma rozkład symetryczny. Wykazać, że jeżeli te same piłki uszeregować według masy, to otrzymany rozkład będzie miał dodatnią asymetrię (tzn. trzeci moment centralny będzie dodatni).

8.4. Udowodnić, że każda dystrybuanta spełnia następujące warunki

$$\lim_{x \to \infty} x \int_x^{\infty} \frac{1}{z} dF(z) = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x \int_x^{\infty} \frac{1}{z} dF(z) = 0.$$

8.5. Udowodnić, że jeżeli zmienna losowa X ma moment rzędu k, to

$$\lim_{x \to \infty} x^k (1 - F(x) + F(x-)) = 0.$$

8.6. Udowodnić, że ciąg momentów dowolnego rozkładu ciągłego F jest dodatnio określony, tzn. dla dowolnego m i dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mamy

$$\sum_{i,k=0}^{m} a_{i+k} x_i x_k \geq 0, \quad \text{gdzie} \quad a_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i dF(x).$$