Współczynnik korelacji

9.1. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi o skończonych momentach rzędu drugiego. Udowodnić, że $D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne X i Y są niezależne.

9.2. Udowodnić, że jeżeli dla dwóch zmiennych losowych X i Y mamy $|\varrho| = 1$, to istnieją takie stałe a i b, że $X = aY + b$.

9.3. Skonstruować przykład wskazujący, że z tego, że współczynnik korelacji między dwiema zmiennymi równa się zero, nie wynika niezależność tych zmiennych losowych.

9.4. Niech zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależne i mają jednakowy rozkład normalny o średniej μ i wariancji σ^2. Znaleźć dwuwymiarową gęstość rozkładu

$$Y = \sum_{k=1}^{m} X_k \quad \text{oraz} \quad Z = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

gdzie $m < n$.

9.5. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład normalny o parametrach μ i σ.
a. Znaleźć współczynnik korelacji między zmiennymi $\alpha X + \beta Y$ i $\alpha X - \beta Y$ i ich łączny rozkład.
b. Udowodnić, że $E\max(X,Y) = \mu + \sigma/\sqrt{\pi}$.

9.6. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład normalny z parametrami $EX = EY = 0$, $D^2X = D^2Y = 1$, niech ϱ będzie współczynnikiem korelacji między X i Y. Udowodnić, że
a. $\varrho = \cos q\pi$, gdzie $q = P\{XY < 0\}$;
b. $E\max(X,Y) = \sqrt{(1-\varrho)/\pi}$;
c. współczynnik korelacji między X^2 i Y^2 wynosi ϱ^2.

9.7. Niech zmienne losowe X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ będą niezależne i mają jednakowy rozkład, przy czym $E(X - EY)^3 = 0$. Udowodnić, że w tym przypadku zmienne losowe

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{oraz} \quad S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

są nieskorelowane.