Nierówność Czebyszewa

10.1. Niech X będzie zmienną losową o skończonej wariancji. Udowodnić nierówność Czebyszewa:

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D^2X}{\varepsilon^2}.$$

10.2. Niech X będzie dowolną zmienną losową, przy czym $EX = 0$, $D^2X = \sigma^2$; niech $F(x)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Udowodnić, że dla $x < 0$ mamy $F(x) \geq x^2/(\sigma^2 + x^2)$. Pokazać na przykładzie, że w pewnych przypadkach nierówności te mogą być równościami.

10.3. Jeżeli ograniczyć się do pewnych klas rozkładów, to udaje się niekiedy wzmocnić nierówność Czebyszewa. I tak w 1821 roku Gauss udowodnił, że dla jednomodalnych rozkładów typu ciągłego, tzn. takich rozkładów, których gęstość ma dokładnie jedno maksimum, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$P\{|X - x_0| \geq \varepsilon\tau\} \leq \frac{4}{9\varepsilon^2},$$

gdzie x_0 jest wartością modalną, a $\tau^2 = D^2X + (x_0 - EX)^2$ jest drugim momentem względem wartości modalnej. Jeżeli posłużyć się miarą asymetrii

$$S = \frac{EX - x_0}{\sqrt{D^2X}},$$

wprowadzoną przez K. Pearsona, to z poprzedniej nierówności wynika, że dla $|\varepsilon| > s$

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\sqrt{D^2X}\} \leq \frac{4(1 + s^2)}{9(\varepsilon - |s|)^2}.$$

Udowodnić obie te nierówności.
Wskazówka. Pokazać najpierw, że jeżeli $g(x)$ jest funkcją nierosnącą dla $x > 0$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon^2 \int_{\varepsilon}^{\infty} g(x)dx \leq \frac{4}{9} \int_0^{\infty} x^2 g(x)dx.$$

10.4. Uogólnienie nierówności Czebyszewa.
a. Udowodnić, że jeżeli zmienna losowa X ma tę własność, że istnieje Ee^{aX} ($a > 0$ jest stałą), to

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{Ee^{aX}}{e^{a\varepsilon}}.$$

b. Niech $f(x) > 0$ będzie funkcją niemalejącą. Udowodnić, że jeżeli istnieje $Ef(|X - EX|)$, to

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Ef(|X - EX|)}{f(\varepsilon)}.$$