

Różne rozkłady prawdopodobieństwa

12.1. Rozkład dwupunktowy $D(p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład $D(p)$, jeżeli

$$P_p\{\xi = 0\} = p \text{ oraz } P_p\{\xi = 1\} = 1 - p.$$

Narysować wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa. Obliczyć $E\xi$ oraz $D^2\xi$.

12.2. Rozkład dwumianowy $B(n, p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład $B(n, p)$, jeżeli

$$P_{n,p}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Narysować wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa.

Udowodnić, że $E\xi = np$ oraz $D^2\xi = np(1-p)$.

Udowodnić, że jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $D(p)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $B(n, p)$.

12.3. Rozkład ujemny dwumianowy $NB(r, p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r, p) , jeżeli

$$P_{r,p}\{\xi = k\} = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Narysować wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa.

Udowodnić, że $E\xi = r(1-p)/p$ oraz $D^2\xi = r(1-p)/p^2$.

Uwaga: jeżeli $r = 1$, to rozkład ujemny dwumianowy jest **rozkładem geometrycznym**.

12.4. Rozkład Poissona $Po(\lambda)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład $Po(\lambda)$, jeżeli

$$P_\lambda\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Narysować wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa.

Udowodnić, że $E\xi = \lambda$ oraz $D^2\xi = \lambda$.

12.5. Rozkład hipergeometryczny $H(N, n, M)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład hipergeometryczny z parametrami (N, n, M) , jeżeli

$$P_{N,n,M}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Narysować wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa.

Udowodnić, że $E\xi = nM/N$ oraz $D^2\xi = \frac{n(N-n)M(N-M)}{(n-1)N^2}$.

12.6. Rozkład jednostajny $U(a, b)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład jednostajny na przedziale (a, b) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jeżeli } x \in (a, b), \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Narysować wykres funkcji gęstości oraz dystrybuanty. Udowodnić, że

$$E\xi^k = \frac{1}{b-a} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad D^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

12.7. Rozkład trójkątny. Zmienna losowa ξ ma rozkład trójkątny na przedziale (a, b) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} |a+b-2x|, & \text{jeżeli } x \in (a, b), \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Narysować wykres funkcji gęstości oraz dystrybuanty. Udowodnić, że

$$E\xi^k = \frac{4}{(b-a)^2(k+1)(k+2)} \left[a^{k+2} + b^{k+2} - 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+2} \right] \quad (k = 1, 2, \dots), \quad D^2\xi = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

Udowodnić, że jeżeli ξ_1 oraz ξ_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $U(a, b)$, to $\xi = (\xi_1 + \xi_2)/2$ ma rozkład trójkątny na przedziale (a, b) .

12.8. Rozkład beta $B(a, b)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład beta z parametrami (a, b) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ jest funkcją gamma. Narysować wykres funkcji gęstości. Udowodnić, że

$$E\xi^k = \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)} = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}, \quad D^2\xi = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

12.9. Rozkład gamma. Zmienna losowa ξ ma rozkład gamma z parametrami (α, λ) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Narysować wykres funkcji gęstości. Udowodnić, że

$$E\xi^k = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{\lambda^k}, \quad D^2\xi = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Przeanalizować szczegółowo przypadek $\alpha = 1$ (**rozkład wykładniczy**)

12.10. Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład normalny z parametrami μ oraz σ^2 , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Narysować wykres funkcji gęstości. Udowodnić, że

$$E\xi = \mu, \quad E(\xi - \mu)^{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2k-1)\sigma^{2k}, \quad E(\xi - \mu)^{2k+1} = 0, \quad D^2\xi = \sigma^2.$$

12.11. Rozkład Cauchy'ego. Zmienna losowa ξ ma rozkład Cauchy'ego z parametrami (α, λ) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Narysować wykres funkcji gęstości. Udowodnić, że zmienna losowa ξ nie ma wartości oczekiwanej.

12.12. Rozkład chi-kwadrat χ_v^2 . Zmienna losowa ξ ma rozkład chi-kwadrat z v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_v(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

Narysować wykres funkcji gęstości. Udowodnić, że

$$E\xi^k = v(v+2)\cdots[v+2(k-1)], \quad D^2\xi = 2v.$$

Udowodnić, że jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $N(0, 1)$, to zmienna losowa $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ma rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody.

Uwaga: rozkład chi-kwadrat z r stopniami swobody jest rozkładem gamma z parametrami $\alpha = r/2$ oraz $\lambda = 1/2$.

12.13. Rozkład t (Studenta) t_v . Zmienna losowa ξ ma rozkład t z v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_v(x) = \frac{1}{B(1/2, v/2)\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{(1 + x^2/v)^{(v+1)/2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Narysować wykres funkcji gęstości.

Udowodnić, że

$$E\xi^{2k-1} = 0, \quad E\xi^{2k} = \frac{v^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{v}{2} - k) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \quad (2k < v), \quad D^2\xi = \begin{cases} \frac{v}{v-2}, & v > 2, \\ \infty, & v \leq 2. \end{cases}$$

Udowodnić, że jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład $N(0, 1)$, zmienna losowa η ma rozkład chi-kwadrat z v stopniami swobody oraz zmienne te są niezależne, to zmienna losowa $t = \xi/\sqrt{\eta/v}$ ma rozkład t z v stopniami swobody.

12.14. Rozkład F (Snedecora) $F_{u,v}$. Zmienna losowa ξ ma rozkład F (Snedecora) z u oraz v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_{u,v}(x) = \frac{u^{u/2} v^{v/2} \Gamma(\frac{u+v}{2})}{\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} x^{u/2-1} (v + ux)^{-(u+v)/2}, \quad x > 0.$$

Narysować wykres funkcji gęstości.

Udowodnić, że

$$E\xi^k = \frac{\Gamma(\frac{v}{2} + k) \Gamma(\frac{v}{2} - k) v^k}{\Gamma(\frac{u}{2}) u^k \Gamma(\frac{v}{2})} \quad (2k < v) \quad D^2\xi = \frac{2v^2(u + v - 2)}{u(v - 2)^2(v - 4)} \quad (v > 4).$$

Udowodnić, że jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład chi-kwadrat z v stopniami swobody, zmienna losowa η ma rozkład chi-kwadrat z u stopniami swobody i zmienne te są niezależne, to zmienna losowa $F = (\xi/v)/(\eta/u)$ ma rozkład F z (v, u) stopniami swobody.

Udowodnić, że jeżeli $\xi \sim F_{2r, 2p}$, to $\frac{1}{1+\xi} \sim B(p, r)$.

12.15. Rozkład z Fishera. Zmienna losowa ξ ma rozkład z Fishera z (r, s) stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{2r^{\frac{r}{2}} s^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{r+s}{2}) e^{rx}}{\Gamma(\frac{r}{2}) \Gamma(\frac{s}{2}) (s + re^{2x})^{\frac{r+s}{2}}}, \quad x \in R$$

Narysować wykres funkcji gęstości.

Udowodnić, że

$$E\xi = 0, \quad D^2\xi = \frac{1}{2} \frac{r + s}{rs}.$$

Uwaga: jeżeli $\xi \sim F_{r,s}$, to $\frac{1}{2} \ln \xi$ ma rozkład z Fishera z (r, s) stopniami swobody.

12.16. Rozkład wielomianowy. Wektor losowy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ma rozkład wielomianowy z parametrami (n, p_1, \dots, p_k) , jeżeli

$$P\{\xi = \mathbf{m}\} = P\{\xi_1 = m_1, \dots, \xi_k = m_k\} = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$$

gdzie $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$, $\sum_{i=1}^k m_i = n$, $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

Udowodnić, że

$$E\xi = n(p_1, \dots, p_k), \quad Cov\xi_i \xi_j = -np_i p_j (i \neq j), \quad D^2\xi_i = np_i(1 - p_i).$$

Pokazać, że jeżeli $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$ są niezależnymi k -wymiarowymi wektorami losowymi o rozkładach wielomianowych z parametrami $(n_1, \mathbf{p}), \dots, (n_k, \mathbf{p})$, to $\xi = \sum \xi^{(i)}$ ma rozkład wielomianowy z parametrami $(\sum n_i, \mathbf{p})$.

Uwaga: rozkład wielomianowy jest wielowymiarowym analogiem rozkładu dwumianowego.

12.17. Rozkład Dirichleta. Wektor losowy $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ma rozkład Dirichleta z parametrami $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ($\alpha_i > 0$), jeżeli funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}, & \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 0, & \mathbf{x} \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in R^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_i > 0\}$.

Udowodnić, że

$$E\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\alpha_0}, \quad Cov\xi_i\xi_j = -\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_0^2(1+\alpha_0)} (i \neq j), \quad D^2\xi_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \left(\alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \right).$$

Uwaga: rozkład Dirichleta jest wielowymiarowym analogiem rozkładu beta.

12.18. Wielowymiarowy rozkład normalny $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Wektor losowy $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]'$ ma n -wymiarowy rozkład normalny, jeżeli jego funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right].$$

Udowodnić, że

$$E\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}, \quad D^2\mathbf{x} = \boldsymbol{\Sigma}$$

Udowodnić, że

a. Jeżeli $\mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$, \mathbf{A} – $p \times n$ macierz stałych, to $\mathbf{Ax} \sim N_p(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}')$.

b. Jeżeli X_1, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o tej samej wariancji oraz \mathbf{T} jest macierzą ortogonalną, to elementy wektora losowego $\mathbf{T}\mathbf{x}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych.

c. Jeżeli \mathbf{x} ma n -wymiarowy rozkład normalny, to każda składowa ma jednowymiarowy rozkład normalny (twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.)

d. Wektor \mathbf{x} ma wielowymiarowy rozkład normalny wtedy i tylko wtedy, gdy ($\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ ma jednowymiarowy rozkład normalny.

e. Niech $\mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$. Zmienne losowe $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{b}'\mathbf{x}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{a}'\mathbf{b} = 0$.