Estymatory nieobciążone

Zadanie 1. Pobieramy próbkę $X_1, \ldots, X_n$ niezależnych obserwacji z rozkładu Poissona o nieznanym parametrze λ. Szacujemy $p_0 = e^{-\lambda}$ za pomocą estymatora $\hat{p}_0 = e^{-\bar{X}}$, gdzie $\bar{X}$ jest średnią z próbki. Wyznaczyć znak obciążenia $E\hat{p}_0 - p_0$ tego estymatora.
Odp. dodatni

Zadanie 2. Sygnały pojawiają się zgodnie z procesem Poissona, a oczekiwana ilość sygnałów na jednostkę czasu wynosi λ. Obserwujemy proces od momentu T_0 do momentu T_n pojawienia się n-tego sygnału, przy czym n jest z góry ustaloną liczbą całkowitą równą co najmniej 2. Wyznaczyć nieobciążony estymator parametru λ.
Odp. $\frac{n-1}{T_n - T_0}$

Zadanie 3. Pobrano sto niezależnych obserwacji z rozkładu normalnego o nieznanej wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2. Obliczono dziesięć sum po dziesięć obserwacji, a następnie zgubiono dane źródłowe. Zamiast pierwotnych obserwacji $X_1, \ldots, X_{100}$ mamy więc obserwacje $Y_1, \ldots, Y_{10}$, gdzie $Y_i = \sum_{j=0}^{9} X_{10i-j}$. Szacujemy wariancję σ^2 używając estymatora postaci $const \sum_{i=1}^{10}(Y_i - \bar{Y})^2$. Wyznaczyć stałą $const$ tak, by estymator był nieobciążony.
Odp. $1/90$

Zadanie 4. Niech $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ będzie próbą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego o wektorze wartości oczekiwanych (μ_X, μ_Y) i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ \varrho & 1 \end{bmatrix}$. Dla jakich ϱ nieobciążonym estymatorem parametru $\min\{\mu_X, \mu_Y\}$ jest statystyka $\min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right\}$?
Odp. $\varrho = 1$

Zadanie 5. Każda ze zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ ma taką samą wartość oczekiwaną μ. Wiadomo, że

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{dla } i = j, \\ \frac{\sigma^2}{2}, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Niech $S^2(c) = c\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Dla jakiej wartości c, $S^2(c)$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2?
Odp. $\frac{2}{n-1}$

Zadanie 6. Niech $X_1, \ldots, X_n$, gdzie $n > 1$, będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\mu}_2 = n \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

będą dwoma estymatorami parametru μ. Udowodnić, że oba estymatory są nieobciążone oraz, że estymator $\hat{\mu}_1$ ma zawsze mniejszą wariancję niż $\hat{\mu}_2$.
Odp. —

Zadanie 7. Wykonano dziesięć pomiarów pewnej nieznanej wielkości μ jednym przyrządem pomiarowym, a następnie pięć pomiarów innym przyrządem. Zakładamy, że wyniki pomiarów $X_1, \ldots, X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{15}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym każda ze zmiennych $X_1, \ldots, X_{10}$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, (0.1)^2)$, podczas gdy każda ze zmiennych $X_{11}, \ldots, X_{15}$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, (0.2)^2)$. Dobrać współczynniki $c_1, \ldots, c_{15}$ tak, żeby estymator $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{15} c_i X_i$ był nieobciążonym estymatorem o minimalnej wariancji parametru μ.
Odp. $c_1 = \cdots = c_{10} = \frac{8}{90}$, $c_{11} = \cdots = c_{15} = \frac{1}{45}$

Zadanie 8. Niech $x_1, \ldots, x_{25}$ będzie realizacją próby losowej z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, zaś $x_{26}, \ldots, x_{50}$ - realizacją próby losowej z rozkładu $N(\nu, \tau^2)$, gdzie $\mu, \nu, \sigma^2, \tau^2$ są nieznanymi parametrami. Wiadomo, że

$$\bar{x}_{25} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 10.4, \quad \bar{x}_{50} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = 10.0,$$

$$s_{25}^2 = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{25}(x_i - \bar{x}_{25})^2 = 3.333, \quad s_{50}^2 = \frac{1}{49}\sum_{i=1}^{50}(x_i - \bar{x}_{50})^2 = 2.000.$$

Obliczyć na tej podstawie wartość nieobciążonego estymatora wariancji τ^2.
Odp. 0.417

Zadanie 9. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu normalnego o nieznanych parametrach (μ, σ^2) i niech $n > 1$ oraz $\sigma^2 > 0$. Niech

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad t(\mu_0) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2}},$$

gdzie μ_0 jest ustaloną liczbą. Niech t_α będzie dwustronną wartością krytyczną rozkładu Studenta z $n-1$ stopniami swobody. Rozważmy następujący estymator $\hat{\mu}$ parametru μ:

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_0, & \text{jeżeli } |t(\mu_0)| < t_\alpha, \\ \bar{X}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla jakich μ obciążenie $E_\mu \hat{\mu} - \mu$ estymatora jest dodatnie?
Odp. $\mu < \mu_0$

Zadanie 10. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu o gęstości

$$f_{c,\mu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x-c}{\mu}}, & \text{dla } x > c, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $c \in R$ i $\mu > 0$ są nieznanymi parametrami. Wyznaczyć nieobciążony estymator parametru μ.
Odp. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{n-1}\min\{X_1, \ldots, X_n\}$

Zadanie 11. Niech $N_1, \ldots, N_n$ będzie próbą z rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej λ i niech $\bar{N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i$ będzie średnią z tej próby. Dla jakiej wartości C estymator $C^{\bar{N}}$ parametru $e^{-\lambda}$ będzie nieobciążony?
Odp. $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$

Zadanie 12. Proces pojawiania się szkód jest procesem Poissonowskim z parametrem intensywności λ, tzn. prawdopodobieństwo pojawienia się n szkód na odcinku czasu $(0, T]$ jest równe $\frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$. Obserwujemy proces od momentu 0. Niech $T_1, T_2, T_3, \ldots$ oznaczają momenty pojawiania się kolejnych szkód. Ustalamy z góry liczbę n taką, że obserwację procesu przerwiemy w momencie T_n pojawienia się n-tej szkody. Dla jakiej wartości C estymator $\frac{C}{T_n}$, parametru λ jest estymatorem nieobciążonym?
Odp. $n-1$ dla $n > 1$

Zadanie 13. Niech X będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu jednostajnego na przedziale $(\theta - 0.5, \theta + 0.5)$ z nieznanym parametrem θ. Wiemy, że θ jest liczbą rzeczywistą. Za pomocą estymatora $|X|$ estymujemy wartość bezwzględną parametru θ. Wyznaczyć maksymalne obciążenie $E_\theta |X| - \theta$ tego estymatora.
Odp. 0.25

Zadanie 14. $X_1, \ldots, X_n$ jest prostą próbą losową z rozkładu geometrycznego: $P(X_i = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, \ldots$, gdzie $p \in (0,1)$ i liczebność próby przekracza 1. W klasie estymatorów parametru p danych wzorem:

$$\frac{a}{a + \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

dobrać parametr a tak, aby otrzymać estymator nieobciążony.
Odp. $n - 1$

Zadanie 15. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą niezależnych obserwacji z rozkładu jednostajnego na przedziale (φ_0, φ_1) z nieznanymi oboma parametrami i niech $n > 1$. Interesuje nas szerokość przedziału $\varphi_1 - \varphi_0$. Dobrać parametr a tak, aby estymator $a(\max\{X_1, \ldots, X_n\} - \min\{X_1, \ldots, X_n\})$ szerokości przedziału był nieobciążony.
Odp. $\frac{n+1}{n-1}$

Zadanie 16. Dla $t = 1, \ldots, T$ obserwujemy niezależne realizacje zmiennej losowej X_t, o których zakładamy iż pochodzą z rozkładu o parametrach $EX_t = n_t\mu$ i $VarX_t = n_t\sigma^2$, gdzie wartości $n_1, \ldots, n_T$ są nam znane (i dodatnie), natomiast parametry μ oraz σ^2 są nieznane. Wybieramy estymator parametru σ^2 z klasy estymatorów postaci $c\sum_{t=1}^{T}(X_t - n_t\bar{X})^2$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{T} X_t$ oraz $n = \sum_{t=1}^{T} n_t$, zaś c jest pewną liczbą rzeczywistą (parametrem konkretnego estymatora). Dla jakiej wartości c otrzymamy estymator nieobciążony.
Odp. $\frac{n}{nT-n}$

Zadanie 17. Mamy dwie niezależne obserwacje X_1 oraz X_2 z rozkładu normalnego, przy czym jedna z nich pochodzi z rozkładu o parametrach (μ, σ^2), a druga z rozkładu o parametrach $(2\mu, 2\sigma^2)$. Niestety zgubiliśmy informację, która z obserwacji z którego z rozkładów pochodzi. Parametry (μ, σ^2) są nieznane. W tej sytuacji wybieramy estymator parametru σ^2 z klasy estymatorów postaci

$$\hat{\sigma}^2 = a(X_1 - X_2)^2 + b(X_1 + X_2)^2,$$

gdzie (a, b) to para liczb rzeczywistych (parametry konkretnego estymatora). Dla jakich (a, b) otrzymamy estymator nieobciążony.
Odp. $a = 3/8$, $b = -1/24$

Zadanie 18. Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+m}$ będzie próbą prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie $m, n > 1$. Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje $X_1, \ldots, X_n$, ale znamy średnią $\bar{X}_{n+m} = \frac{1}{n+m}\sum_{i=1}^{n+m} X_i$. Dla jakiej liczby c estymator $c\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_{n+m})^2$ wariancji σ^2 jest nieobciążony?
Odp. $\frac{1}{n}\frac{n+m}{n+m-1}$

Zadanie 19. Przeprowadzamy wśród wylosowanych osób ankietę na delikatny temat. Ankietowana osoba rzuca kostką do gry i w zależności od wyniku rzutu kostką (wyniku tego nie zna ankieter) podaje odpowiednio zakodowaną odpowiedź na pytanie: *Czy zdarzyło się Panu/Pani w roku 1999 dać łapówkę w klasycznej formie pieniężnej, przekraczającą kwotę* 100 *zł?* Przyjmijmy, iż interesująca nas cecha X przyjmuje wartość 1, jeśli odpowiedź brzmi „TAK" i 0, jeśli odpowiedź brzmi „NIE". Pierwszych 100 osób udziela odpowiedzi $Z_1, \ldots, Z_{100}$ zgodnie z regułą: jeśli wynik rzutu kostką, to liczba oczek równa 1, 2, 3 lub 4, to $Z_i = X_i$, natomiast jeśli wynik rzutu kostką, to liczba oczek równa 5 lub 6, to $Z_i = 1 - X_i$. Następnych 100 osób udziela odpowiedzi $Z_{101}, \ldots, Z_{200}$ zgodnie z regułą: jeśli wynik rzutu kostką, to liczba oczek równa 1 lub 2, to $Z_i = X_i$, natomiast jeśli wynik rzutu kostką to liczba oczek równa 3, 4, 5 lub 6, to $Z_i = 1 - X_i$. Dla uproszczenia zakładamy, że dwieście ankietowanych osób to próba prosta z (hipotetycznej) populacji o nieskończonej liczebności, a podział na podpróby jest także całkowicie losowy. Interesujący nas parametr tej populacji to oczywiście $q_X = P(X = 1)$. W wyniku przeprowadzonej ankiety dysponujemy średnimi z podpróbek: $\bar{Z}_1 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} Z_i$ i $\bar{Z}_2 = \frac{1}{100}\sum_{i=101}^{200} Z_i$. Estymator parametru q_X uzyskany metodą największej wiarogodności ma postać $\hat{q}_X = a_0 + a_1\hat{Z}_1 + a_2\hat{Z}_2$. Dla jakich a_0, a_1, a_2 estymator ten jest nieobciążony?
Odp. $a_0 = 0.5$, $a_1 = 1.5$, $a_2 = -1.5$

Zadanie 20. Rozważmy dwie niezależne próbki $X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2} \sim N(\mu, 2\sigma^2)$. Niech $\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i}$, $\bar{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2,i}$ oraz $\bar{X} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1+n_2}$. Dla jakiego c estymator parametru σ^2 postaci $c\left\{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1,i} - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2,i} - \bar{X})^2\right\}$ jest nieobciążony?
Odp. $\frac{1}{n_1+n_2-1}$

Zadanie 21. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką prostą z rozkładu wykładniczego o gęstości $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ dla $x > 0$, gdzie $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem oraz $n > 1$. Niech $a > 0$ będzie daną liczbą. Interesuje nas estymacja parametru $p = e^{-\lambda a} = P_\lambda(X_1 > a)$. Niech N_a oznacza liczbę obserwacji większych od a, zaś $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Rozważmy trzy estymatory parametru p:

$$\hat{p}_1 = \exp\left(-a\frac{n}{S}\right), \quad \hat{p}_2 = \frac{n_a}{N}, \quad \hat{p}_3 = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S \le a, \\ \left(\frac{S-a}{S}\right)^{n-1}, & \text{gdy } S > a \end{cases}.$$

Które z poniższych zdań jest zdaniem prawdziwym?
(A) estymatory $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ i $\hat{p}_3$ są nieobciążone;
(B) estymator $\hat{p}_2$ jest nieobciążony, zaś $\hat{p}_1$ i $\hat{p}_3$ są obciążone;
(C) estymatory $\hat{p}_1$ i $\hat{p}_2$ są nieobciążone, zaś $\hat{p}_3$ jest obciążony;
(D) estymatory $\hat{p}_2$ i $\hat{p}_3$ są nieobciążone i $Var(\hat{p}_2) < Var(\hat{p}_3)$;
(E) estymatory $\hat{p}_2$ i $\hat{p}_3$ są nieobciążone i $Var(\hat{p}_2) > Var(\hat{p}_3)$.
Odp. E

Zadanie 22. Niech $X_1, \ldots, X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{20}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_{10}$ mają rozkład normalny $N(\mu_1, \sigma^2)$, zaś $X_{11}, \ldots, X_{20}$ mają rozkład normalny $N(\mu_2, \sigma^2)$. Niech

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i, \quad \bar{X}_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=11}^{20} X_i, \quad \bar{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i.$$

Dobrać liczby α i β tak, żeby statystyka

$$\hat{\sigma}^2 = \alpha\sum_{i=1}^{20}(X_i - \bar{X})^2 + \beta(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2$$

była nieobciążonym estymatorem parametru σ^2.
Odp. $\alpha = 1/18$, $\beta = -5/18$

Zadanie 23. Niech Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym Y_k ma rozkład normalny $N(k\mu, \sigma^2)$, dla $k = 1, 2, 3, 4$. Rozważamy estymatory nieznanego parametru μ postaci

$$\hat{\mu} = a_1Y_1 + a_2Y_2 + a_3Y_3 + a_4Y_4.$$

Znaleźć najmniejszą wariancję estymatora powyższej postaci, przy założeniu, że jest to estymator nieobciążony.
Odp. $\sigma^2/30$

Zadanie 24. Załóżmy, że X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$. Niech $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3(X_i - \bar{X})^2$ będzie nieobciążonym estymatorem wariancji. Obliczyć $P(S^2 \le \sigma^2)$.
Odp. 0.63212

Zadanie 25. Niech $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_m$ będzie próbką z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznanymi parametrami μ i σ^2. Obserwujemy zmienne $X_1, \ldots, X_n$ i ponadto znamy średnią ze wszystkich zmiennych $\bar{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$. Znaleźć stałą $c_{n,m}$ taką, żeby statystyka

$$\frac{1}{c_{n,m}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_m)^2$$

była nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2.
Odp. $n\left(1 - \frac{1}{m}\right)$

Zadanie 26. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Parametr $\lambda > 0$ jest nieznany. Niech $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Znaleźć taką liczbę c, żeby $c(\bar{X})^2$ był nieobciążonym estymatorem wariancji pojedynczej zmiennej X_i.
Odp. $\frac{n}{n+1}$

Zadanie 27. Niech $N_1, \ldots, N_{10}$ będzie próbką z rozkładu Poissona z nieznanym parametrem λ. Interesuje nas drugi moment obserwacji, czyli wielkość $m_2(\lambda) = E_\lambda(N_1^2)$. Chcemy skonstruować taki estymator wielkości $m_2(\lambda)$, który jest nieobciążony i który jest funkcją zmiennej $S = N_1 + \cdots + N_{10}$ (zależy tylko od sumy obserwacji).
Odp. $\frac{1}{100}S(S+9)$

Zadanie 28. Rozpatrzmy następujący model regresji liniowej bez wyrazu wolnego:

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

gdzie x_i są znanymi liczbami, β jest nieznanym parametrem, zaś ε_i są błędami losowymi. Zakładamy, że

$$E\varepsilon_i = 0, \quad Var\varepsilon_i = x_i^2\sigma^2, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Skonstruować estymator $\hat{\beta}$ parametru β o następujących własnościach:
$\hat{\beta}$ jest liniową funkcją obserwacji, tzn. $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n c_i Y_i$,
$\hat{\beta}$ jest nieobciążony, tzn. $E\hat{\beta} = \beta$,
$\hat{\beta}$ ma najmniejszą wariancję spośród estymatorów liniowych i nieobciążonych.
Odp. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$

Zadanie 29. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right), & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy nieobciążony estymator parametru θ postaci $T_n = aY$, gdzie $Y = \min\{X_1^2, \ldots, X_n^2\}$ i a jest odpowiednio dobraną stałą (być może zależną od liczebności próby n). Pokazać, że

$$(\forall\theta > 0)(\forall 0 < \varepsilon < 1)\ P_\theta\{|T_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 - \exp(-1)\left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)\right).$$

Odp. —

Zadanie 30. Niech $X_1, \ldots, X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie $\mu \in R$, $\sigma^2 > 0$ są nieznanymi parametrami. Niech $\bar{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$, $S^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(X_i - \bar{X})^2$. Wyznaczyć estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru μ/σ.
Odp. $\frac{3}{\Gamma(3.5)}\frac{\bar{X}}{S}$

Zadanie 31. Zakładamy, że $X_1, \ldots, X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{20}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym $EX_i = \mu_1$ i $VarX_i = \sigma^2$ dla $i = 1, \ldots, 10$ oraz $EX_i = \mu_2$ i $VarX_i = 2\sigma^2$ dla $i = 11, \ldots, 20$. Parametry μ_1, μ_2, σ są nieznane. Niech $\bar{X}_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}$, $\bar{X}_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=11}^{20}$, $\bar{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}$. Dobrać stałe a i b tak, aby statystyka

$$\hat{\sigma}^2 = a\sum_{i=1}^{20}(X_i - \bar{X})^2 + b(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2$$

była nieobciążonym estymatorem parametru σ^2.
Odp. $a = 1/27$, $b = -5/27$

Zadanie 32. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymator nieobciążony parametru θ postaci $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = T_n = aX_{1:n}$, gdzie $X_{1:n} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ i a jest pewną stałą. Udowodnić, że

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists \theta > 0) \ \lim_{n\to\infty} P_\theta(|T_n - \theta| > \varepsilon) = 1 + \exp\left(-1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right) - \exp\left(-1 + \frac{\varepsilon}{\theta}\right).$$

Odp. —

Ryzyko estymatorów

Zadanie 33. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o nieznanej średniej i wariancji. Rozpatrzmy klasę estymatorów wariancji określonych wzorem $S(c) = c\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $\bar{X}$ jest średnią z próbki, a c jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć wartość c, przy której błąd średniokwadratowy estymatora $S(c)$ osiąga minimum.
Odp. $1 + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$

Zadanie 34. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z niezależnych obserwacji z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \varphi)$ z nieznanym prawym końcem przedziału φ. Estymator $\frac{n+1}{n}\max\{X_1, \ldots, X_n\}$ jest nieobciążony. Wyznaczyć wariancję tego estymatora.
Odp. $\frac{\varphi^2}{n(n+2)}$

Zadanie 35. Zakładamy, że $X_1, \ldots, X_n$ jest próbą z rozkładu normalnego $N(\mu, \gamma^2\sigma^2)$, gdzie $\mu \in R$ jest nieznanym parametrem, zaś γ^2 znanym współczynnikiem. Wyznaczyć estymator postaci $\hat{\mu} = c_1X_1 + \cdots + c_nX_n$ parametru μ, który ma jednostajnie najmniejszy błąd średniokwadratowy $E_\mu(\hat{\mu} - \mu)^2$.
Odp. $c_1 = \cdots = c_n = \frac{1}{1+\gamma^2}$

Zadanie 36. Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową, o wartości oczekiwanej (μ_X, μ_Y), wariancji każdej ze współrzędnych równej σ^2 oraz kowariancji równej $\varrho\sigma^2$. Staramy się obserwować niezależne realizacje tej zmiennej, ale nie w pełni to wychodzi - czasem udaje się zaobserwować jedynie pierwszą lub jedynie drugą ze współrzędnych. Przyjmijmy ważne założenie, iż do „zgubienia” obserwacji (całkowitego, jej pierwszej współrzędnej lub jej drugiej współrzędnej) dochodzi całkowicie niezależnie od wartości tych obserwacji. Załóżmy, iż otrzymaliśmy próbkę, zawierającą 20 obserwacji wyłącznie pierwszej współrzędnej, 60 obserwacji całej pary oraz 20 obserwacji wyłącznie drugiej współrzędnej. Niech teraz $\bar{X}$ oznacza średnią z próbki (osiemdziesięciu) obserwacji na zmiennej X, $\bar{Y}$ oznacza średnią z próbki (osiemdziesięciu) obserwacji na zmiennej Y oraz niech $\overline{X - Y}$ oznacza średnią z próbki (sześćdziesięciu) obserwacji na różnicy zmiennych $X - Y$. Niech $\bar{X} - \bar{Y}$ oraz $\overline{X - Y}$ oznaczają dwa alternatywne estymatory różnicy $\mu_X - \mu_Y$. Dla jakiej wartości współczynnika ϱ estymatory te mają jednakową wariancję?
Odp. 4/7

Zadanie 37. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Niech $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Interesuje nas względny błąd estymacji: $R = \frac{S^2-\sigma^2}{\sigma^2}$. Wyznaczyć rozmiar n próbki, dla którego $E(R^2) = 0.01$.
Odp. 201

Zadanie 38. Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n$ jest próbką z rozkładu prawdopodobieństwa o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = P_\theta(X_i \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważmy następujący estymator: $\hat{\theta} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Wyznaczyć funkcję ryzyka tego estymatora:

$$R(\theta) = E_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2.$$

Odp. $\frac{2}{n^2}e^{-n\theta}$

Zadanie 39. Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznanymi parametrami. Rozważmy nieobciążony estymator wielkości μ^2 dany wzorem

$$\overline{\mu^2} = (\bar{X})^2 - \frac{S^2}{n},$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ i $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Obliczyć $Var(\overline{\mu^2})$.
Odp. $\frac{4}{n}\mu^2\sigma^2 + \frac{2}{n(n-1)}\sigma^2$

Zadanie 40. Załóżmy, że K oznacza liczbę sukcesów w n próbach Bernoulliego z nieznanym prawdopodobieństwem sukcesu θ. Rozważmy estymator parametru θ postaci

$$\hat{\theta} = \frac{a + K}{b + n}.$$

Niech $n = 16$. Przypuśćmy, że dodatnie liczby a i b dobrane zostały tak, że funkcja ryzyka estymatora, $R(\theta) = E_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2$ jest funkcją stałą, czyli $R(\theta) = R$ dla każdej wartości parametru θ. Podać liczbę R.
Odp. 0.01

Zadanie 41. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu o gęstości danej wzorem:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{1/\theta - 1}, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Znaleźć estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ i obliczyć błąd średniokwadratowy tego estymatora $R(\theta) = E_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2$.
Odp. θ^2/n

Zadanie 42. Niech $W_1, \ldots, W_n$ $(n > 1)$ będzie próbką z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej μ. Rozważmy estymatory parametru μ postaci

$$\hat{\mu} = aS, \quad \text{gdzie} \quad S = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

Znaleźć liczbę a, dla której błąd średniokwadratowy estymatora, czyli wielkość $E_\mu(\hat{\mu} - \mu)^2$ jest najmniejszy.
Odp. $\frac{1}{n+1}$

Zadanie 43. Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienna losowa X_i ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ i wariancji $i\mu^2$, $i = 1, 2, 3, 4$, gdzie $\mu \neq 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy estymatory parametru μ postaci

$$\hat{\mu} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4.$$

Znaleźć współczynniki a_i, $i = 1, 2, 3, 4$, dla których estymator ma najmniejszy błąd średniokwadratowy, czyli współczynniki minimalizujące funkcję $E_\mu(\hat{\mu} - \mu)^2$.
Odp. $a_1 = 12/37$, $a_2 = 6/37$, $a_3 = 4/37$, $a_4 = 3/37$

Zadanie 44. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z nieznanym parametrem $\lambda > 0$. O parametrze λ zakładamy, że podlega rozkładowi *a priori* gamma $G(2, 8)$. Zmienna losowa θ ma rozkład beta $b(1, 2)$. Zmienne N i θ są niezależne i zmienne λ i θ są niezależne. Obserwujemy zmienną losową X, która przy znanych wartościach N i θ ma rozkład dwumianowy $B(N, \theta)$. Wyznaczyć wartości a i b najlepszego liniowego predyktora zmiennej losowej N, to znaczy liczby a i b minimalizujące wielkość $E(N - aX - b)^2$.
Odp. $a = \frac{54}{53}$, $b = \frac{35}{212}$

Zadanie 45. Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym $EX_i = i\mu$ oraz $VarX_i = i^2\mu^2$, $i = 1, 2, 3, 4$. Niech $\tilde{\mu}$ będzie estymatorem parametru μ minimalizującym błąd średniokwadratowy w klasie estymatorów postaci

$$\tilde{\mu} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4,$$

gdzie a_1, a_2, a_3, a_4 są liczbami rzeczywistymi. Wyznaczyć błąd średniokwadratowy $E_\mu(\tilde{\mu} - \mu)^2$.
Odp. $\mu^2/5$

Zadanie 46. Pobieramy próbkę niezależnych realizacji zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną $\lambda > 0$. Niestety sposób obserwacji uniemożliwia odnotowanie realizacji o wartości 0. Pobieranie próbki kończymy w momencie, gdy liczebność odnotowanych realizacji wynosi n. Tak więc, każda z naszych kolejnych odnotowanych realizacji $K_1, \ldots, K_n$ wynosi co najmniej 1 i nic nie wiemy o tym, ile w międzyczasie pojawiło się obserwacji o wartości 0. Estymujemy parametr λ za pomocą estymatora postaci

$$\hat{\lambda} = \sum_{i=2}^{\infty} i N_i,$$

gdzie N_i jest liczbą obserwacji o wartości i. Obliczyć wariancję estymatora $\hat{\lambda}$.
Odp. $\frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda e^{\lambda}}{n(e^{\lambda} - 1)}$

Zadanie 47. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ oraz niech $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Interesuje nas względny błąd estymacji $R = \frac{S^2 - \sigma^2}{\sigma^2}$. Przy $n = 10$ wyznaczyć wartość oczekiwaną $E(R^2)$.
Odp. 0.19

Zadanie 48. Niech $X_1, \ldots, X_n$, gdzie $n > 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{4c^4}{x^5}, & \text{gdy } x > c, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $c > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważamy dwa estymatory parametru c: $T_1 = a \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ i $T_2 = b\bar{X}$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ oraz a, b są dobrane tak, aby estymatory były nieobciążone. Wyznaczyć różnicę ryzyk estymatorów, czyli

$$R = E_c(T_2 - c)^2 - E_c(T_1 - c)^2.$$

Odp. $\frac{(n-1)c^2}{4n(2n-1)}$

Zadanie 49. Niech $X = (X_1, \ldots, X_k)$ będzie zmienną losową o rozkładzie wielomianowym z parametrami $(n, p_1, \ldots, p_k)$, gdzie wektor $p = (p_1, \ldots, p_k)$ ($p_i \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, k$ oraz $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$) jest wektorem nieznanych parametrów. Rozważamy problem estymacji wektora p przy kwadratowej funkcji straty $L(\hat{p}, p) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\hat{p}_i - p_i)^2$. Wśród estymatorów wektora p postaci $\hat{p} = (aX_1 + b, \ldots, aX_k + b)$ (gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi) o ryzyku (tzn. $EL(\hat{p}, p)$) stałym, niezależnym od p, wyznaczyć estymator o najmniejszym ryzyku.
Odp. $a = \frac{1}{n + \sqrt{n}}$, $b = \frac{1}{k(n + \sqrt{n})}$

Estymatory największej wiarogodności

Zadanie 50. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem λ, który chcemy oszacować. Niestety możemy obserwować jedynie zmienną losową M, która przyjmuje wartość zero, jeśli N równa się zero, a wartość jeden, jeśli N jest większa od zera. Średnią arytmetyczną z próbki niezależnych obserwacji zmiennej M oznaczmy przez $\bar{m}$. Wyznaczyć estymator największej wiarogodności parametru λ.
Odp. $\ln\left(\frac{1}{1-\bar{m}}\right)$

Zadanie 51. Niech $X_1, \ldots, X_{100}$ będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o nieznanej wartości oczekiwanej μ. Estymujemy μ na podstawie częściowej informacji o próbce, a mianowicie na podstawie tego, że 80 obserwacji miało wartości poniżej 3 oraz średnia arytmetyczna z tych 80-ciu wartości wynosi 2. Obliczyć wartość estymatora największej wiarogodności parametru μ skonstruowanego na podstawie podanej informacji.
Odp. 11/4

Zadanie 52. Przyjmujemy, że liczby wypadków $N_1, \ldots, N_k$ zgłoszonych w kolejnych k latach są niezależnymi zmiennymi losowymi. Zakładamy, że zmienna N_i ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną λm_i, gdzie m_i jest znaną liczbą samochodów ubezpieczonych w i-tym roku, zaś λ nieznanym parametrem. Wyznaczyć estymator największej wiarogodności parametru λ.
Odp. $\frac{\sum_{i=1}^k N_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$

Zadanie 53. $X_1, \ldots, X_n$ jest próbą losową z rozkładu o dystrybuancie

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{(1+e^{-1})^\alpha}, \qquad x \in R,\ \alpha > 0.$$

Wyznaczyć estymator największej wiarogodności parametru α.
Odp. $n\left[\sum_{i=1}^n \ln(1+\exp(-X_i))\right]^{-1}$

Zadanie 54. $X_1, \ldots, X_n$ jest próbą losową z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \text{dla } x > \theta, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Znaleźć estymator największej wiarogodności parametru θ.
Odp. $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$

Zadanie 55. Niech $X_1, \ldots, X_8, X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy tym gęstość zmiennej X_i $(i = 1, \ldots, 8)$ jest dana wzorem

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Zmienna X_9 ma rozkład o gęstości

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczyć estymator największej wiarogodności parametru λ.
Odp. $\frac{10}{\sum_{i=1}^9 X_i}$

Zadanie 56. W pewnej populacji prawdopodobieństwo tego, że osobnik przeżyje rok jest równe $(1-\theta)$. Jeżeli osobnik przeżył rok, to (warunkowe) prawdopodobieństwo tego, że przeżyje następny rok też jest równe $(1-\theta)$. W próbce liczącej n osobników z tej populacji zanotowano n_0 przypadków, kiedy osobnik nie przeżył roku, n_1 przypadków, kiedy osobnik przeżył rok, ale nie przeżył drugiego oraz n_2 przypadków, kiedy osobnik przeżył dwa lata. Wyznaczyć estymator największej wiarogodności parametru θ.
Odp. $\frac{n_0+n_1}{n+n_1+n_2}$

Zadanie 57. Wykonano n doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p = 1/3$. Liczba n jest nieznanym parametrem. Okazało się, że liczba porażek jest o cztery większa od liczby sukcesów. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności parametru n.
Odp. 8

Zadanie 58. Wiemy, że zmienna losowa X ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ i wariancji 4. Na podstawie czteroelementowej próbki estymujemy μ^2. Zaobserwowano $x_1 = 2$, $x_2 = 3.5$, $x_3 = 3$, $x_4 = 7$. Wyznaczyć różnicę między wartością estymatora największej wiarogodności a wartością nieobciążonego estymatora o minimalnej wariancji.
Odp. 1

Zadanie 59. Pobieramy próbkę niezależnych realizacji zmiennej losowej o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną równą λ (dodatnią). Niestety nasz sposób obserwacji uniemożliwia odnotowanie realizacji o wartości zero. Pobieranie próbki kończymy w momencie, gdy liczebność odnotowanych realizacji wynosi T. Tak więc każda z naszych kolejnych odnotowanych realizacji $k_1, \ldots, k_T$ wynosi co najmniej 1, i nic nie wiemy o tym, ile w międzyczasie pojawiło się (i umknęło z naszego pola widzenia) obserwacji zerowych. Wyznaczyć estymator największej wiarogodności parametru λ.
Odp. estymator jest rozwiązaniem równania $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} k_t$

Zadanie 60. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1}, & \text{dla } x \in (0,1), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Niech $\hat{\theta}$ będzie estymatorem największej wiarogodności nieznanego parametru $\theta > 0$. Obliczyć wariancję tego estymatora.
Odp. θ^2/n

Zadanie 61. W urnie jest r czarnych kul. O liczbie r wiemy tylko tyle, że jest większa od zera. Powtarzamy trzy razy następujące czynności: losujemy jedną kulę z urny i odkładamy ją na bok (nie zwracamy), a następnie wrzucamy do urny jedną kulę białą. Wynikiem doświadczenia jest sekwencja trzech liter - C lub B na przykład CBB oznacza, iż wylosowaliśmy po kolei kulę czarną, potem białą, i znowu białą. Wyznaczyć wartość estymatora $\hat{r}$ największej wiarogodności nieznanej liczby r, gdy zaobserwowano ciąg CBC.
Odp. 2

Zadanie 62. Zakładając, że $X_1, \ldots, X_{10}$ jest próbką prostą z rozkładu wykładniczego o gęstości:

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

przeprowadzono estymację parametru μ metodą największej wiarogodności i otrzymano wartość estymatora $ENW(\mu)$ równą 50. Największa zaobserwowana w próbce wartość $\max\{X_1, \ldots, X_{10}\}$ wyniosła 100, a dziewięć pozostałych było ściśle mniejszych od 100. Okazało się jednak, że w istocie zaobserwowane przez nas wartości $X_1, \ldots, X_{10}$ stanowią próbkę z uciętego rozkładu wykładniczego $X_i = \min\{Y_i, 100\}$, gdzie zmienne losowe Y_i pochodzą z rozkładu wykładniczego o gęstości f_μ. Obliczyć wartość estymatora największej wiarogodności $ENW(\mu)$ po uwzględnieniu modyfikacji założeń.
Odp. $55.555\ldots$

Zadanie 63. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1}, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

Niech $\hat{\theta}$ będzie estymatorem największej wiarogodności nieznanego parametru θ. Obliczyć funkcję ryzyka tego estymatora, tzn. $R(\theta) = E_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2$.
Odp. θ^2/n

Zadanie 64. Rozważmy losową liczbę zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_N$. Zakładamy, że zmienne X_i są wzajemnie niezależne i niezależne od zmiennej losowej N. Wiemy, że każda ze zmiennych X_i ma jednakowy rozkład wykładniczy o gęstości $f_\alpha(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, dla $x > 0$. Zmienna N ma rozkład Poissona z parametrem λ. Zarówno $\lambda > 0$ jak i $\alpha > 0$ są nieznane. Obserwujemy tylko te spośród zmiennych $X_1, \ldots, X_N$, które przekraczają wartość 10. Nie wiemy, ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy pięć wartości większych od 10: $15, 23, 11, 32, 19$. Na podstawie tych danych obliczyć wartości estymatorów największej wiarogodności parametrów λ i α.
Odp. $\hat{\lambda} = 5e$, $\hat{\alpha} = 0.1$

Zadanie 65. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_{\theta,\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-(x-\theta)/\alpha}, & \text{dla } x > \theta, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczono estymatory największej wiarogodności $(\hat{\theta}, \hat{\alpha})$ parametrów (θ, α) w sytuacji, gdy oba parametry są nieznane $(\alpha > 0)$. Znaleźć taką liczbę c, żeby $c\hat{\alpha}$ był nieobciążonym estymatorem parametru α.
Odp. $\frac{n}{n-1}$

Zadanie 66. Niech $W_1, \ldots, W_n$ będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości dla $w > 0$ danej wzorem $f_\lambda(w) = \lambda \exp(-\lambda w)$. Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych W_i, tylko wartości zaokrąglone w górę do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowami, dane są wartości zmiennych losowych $Z_1, \ldots, Z_n$, gdzie $Z_i = \lceil W_i \rceil$ (symbol $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą k taką, że $a \leq k$). Wyznaczyć estymator największej wiarogodności $\hat{\lambda}$ parametru λ oparty na obserwacjach $Z_1, \ldots, Z_n$.
Odp. $-\ln\left(1 - \frac{n}{S}\right)$, gdzie $S = \sum_{i=1}^n Z_i$

Zadanie 67. Wektor losowy (X, Y) ma łączny rozkład prawdopodobieństwa dany następującą tabelką:

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{4}(1-\theta)$	$\frac{1}{4}\theta$
$X = 2$	$\frac{3}{4}\theta$	$\frac{3}{4}(1-\theta)$

gdzie $\theta \in (0, 1)$ jest nieznanym parametrem. Na podstawie 25-elementowej próbki z tego rozkładu wyznaczono estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$. Obliczyć wariancję $Var\hat{\theta}$ estymatora.
Odp. $\frac{\theta(1-\theta)}{25}$

Zadanie 68. Zakładamy, że każda pojedyncza szkoda, niezależnie od pozostałych, z prawdopodobieństwem θ jest likwidowana w roku, w którym została zgłoszona, w drugim roku po zgłoszeniu - z prawdopodobieństwem $\theta(1-\theta)$, w trzecim roku lub później - z prawdopodobieństwem $(1-\theta)^2$. Dane, którymi dysponujemy dotyczą szkód. Wiemy, że spośród nich n_1 zostało zlikwidowanych w roku, w którym zostały zgłoszone, n_2 zostało zlikwidowanych w drugim roku po zgłoszeniu oraz n_3 zostało zlikwidowanych w trzecim roku lub później, gdzie $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Podać estymator największej wiarogodności parametru θ na podstawie tych danych.
Odp. $\frac{n_1+n_2}{2n-n_1}$

Zadanie 69. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Estymując parametr μ^2 wyznaczono dwa estymatory T_1 - estymator największej wiarogodności i T_2 - estymator nieobciążony o minimalnej wariancji. Wyznaczyć różnicę ryzyk estymatorów T_1 i T_2 przy kwadratowej funkcji straty.
Odp. $\frac{\sigma^2(n-3)}{n^2(n-1)}$

Zadanie 70. Niech $X_1, \ldots, X_{m+n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym zmienne losowe X_i, $i = 1, \ldots, m$, mają rozkład Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

a X_i, $i = m+1, \ldots, m+n$, mają rozkład Weibulla o gęstości

$$g_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\sqrt{x}} e^{-2\theta\sqrt{x}}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niech $m = n = 5$. Obliczyć błąd średniokwadratowy estymatora największej wiarogodności wyznaczonego na podstawie próby $X_1, \ldots, X_{m+n}$.
Odp. $\theta^2/6$

Zadanie 71. Niech $X_1, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie prawdopodobieństwa o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{dla } x \in (0,1), \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

a $Y_1, \ldots, Y_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x^{2\theta-1}, & \text{dla } x \in (0,1), \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wszystkie zmienne losowe są niezależne. Dobrać stałą a tak, aby

$$P_\theta\left(\frac{T}{\theta} > a\right) = 0.9,$$

wiedząc, że T jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ otrzymanym na podstawie zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_{10}$ i $Y_1, \ldots, Y_{10}$.
Odp. 0.772

Zadanie 72. Niech T oznacza liczbę pełnych okresów przeżytych przez pacjenta po pewnej operacji. Załóżmy, że T jest zmienną losową o rozkładzie geometrycznym $P_\theta(T = t) = \theta(1-\theta)^t$ dla $t = 0, 1, 2, \ldots$, przy czym $\theta \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Obserwujemy losową grupę stu niezależnych pacjentów, przy czym dla tych pacjentów, dla których $T \leq 5$, znamy T dokładnie, a jeżeli pacjent żyje co najmniej sześć okresów, to jego czas życia jest nieznany, zatem dla każdego z pozostałych pacjentów wiemy tylko, że $T \geq 6$. Estymujemy θ na podstawie tych obserwacji. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ wiedząc, że suma okresów życia pacjentów, którzy przeżyli co najwyżej pięć pełnych okresów jest równa 120 oraz liczba tych pacjentów jest równa 40.
Odp. 1/13

Zadanie 73. Na podstawie prostej próby losowej $X_1, \ldots, X_n$ z rozkładu gamma o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x}, & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

estymujemy parametr θ wykorzystując estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$. Wyznaczyć w przybliżeniu rozmiar próby n taki, że

$$P_\theta\left(\frac{|\hat{\theta} - \theta|}{\theta} \leq 0.05\right) \approx 0.95.$$

Posłużyć się aproksymacją rozkładem normalnym.
Odp. 800

Zadanie 74. Niech $X_1, \ldots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $(-\theta, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niech $\hat{\theta}$ oznacza estymator największej wiarogodności parametru θ. Obliczyć

$$P_\theta(\hat{\theta} < \theta < 2\hat{\theta}).$$

Odp. 0.9844

Zadanie 75. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_5$, $Y_1, \ldots, Y_4$ są niezależne o tym samym rozkładzie z gęstością

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczono estymatory największej wiarogodności $\hat{\theta}_1$ i $\hat{\theta}_2$ parametru θ: estymator $\hat{\theta}_1$ na podstawie próby $X_1, \ldots, X_5$ i estymator $\hat{\theta}_2$ na podstawie próby $Y_1, \ldots, Y_4$. Wyznaczyć stałe a i b, tak aby

$$P_\theta\left(\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} < a\right) = P_\theta\left(\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} > b\right) = 0.05.$$

Odp. $a = 0.299$, $b = 3.072$

Zadanie 76. Zakładamy, że $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym $EX_i = EY_i = \mu$, $VarX_i = \sigma^2$, $VarY_i = 4\sigma^2$ dla $i = 1, \ldots, n$. Parametry μ i σ są nieznane. Niech $\hat{\sigma}^2$ będzie estymatorem największej wiarogodności parametru σ^2 w tym modelu. Wyznaczyć stałą a, tak aby $\tilde{\sigma}^2 = a\hat{\sigma}^2$ był estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.
Odp. $\frac{2n}{2n-1}$

Zadanie 77. W urnie znajduje się razem 76 kul: białych i czarnych. Wylosowano dziesięć kul, wśród których było sześć kul białych. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności liczby kul białych w urnie.
Odp. 46

Zadanie 78. Zakładając, że obserwacje $X_1, \ldots, X_{10}$ stanowią próbkę losową z rozkładu Pareto o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{3^\theta \theta}{(3+x)^{\theta+1}}, dla\text{x¿0,} & \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, wyznaczono wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ i otrzymano $\hat{\theta} = 2$. W próbce były dwie obserwacje o wartości sześć, a pozostałe osiem obserwacji miało wartości mniejsze od 6. Okazało się, że w rzeczywistości zaobserwowane wartości stanowiły próbkę z uciętego rozkładu Pareto, czyli były realizacjami zmiennych losowych $X_i = \min\{Y_i, 6\}$, gdzie Y_i, $i = 1, \ldots, 10$, są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości f_θ. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ po uwzględnieniu modyfikacji założeń.
Odp. 1.50

Zadanie 79. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Rozważamy losową liczbę zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_N$, przy czym zmienne losowe $X_1, \ldots, X_N$ są niezależne wzajemnie i niezależne od zmiennej losowej N. Każda ze zmiennych losowych ma rozkład Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2), & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Obserwujemy tylko te spośród zmiennych $X_1, \ldots, X_N$, które są większe od 10. Nie wiemy ile jest pozostałych zmiennych ani jakie są ich wartości. Przypuśćmy, że zaobserwowaliśmy cztery wartości większe od 10 i suma ich kwadratów jest równa 1200. Na podstawie tych danych wyznaczyć wartości estymatorów największej wiarogodności parametrów θ i λ.
Odp. $\hat{\theta} = 1/200$ i $\hat{\lambda} = 4\sqrt{e}$

Zadanie 80. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej $1/\lambda$. Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych X_i, tylko wartości zaokrąglone w górę do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowami, dane są wartości zmiennych losowych $Z_1, \ldots, Z_n$, gdzie $Z_i = \lceil X_i \rceil$ (symbol $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą k, taką, że $a \leq k$). Niech $S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Wyznaczyć estymator największej wiarogodności $\hat{\lambda}$ nieznanego parametru λ oparty na obserwacjach $Z_1, \ldots, Z_n$.
Odp. $\hat{\lambda} = -\ln\left(1 - \frac{n}{S}\right)$

Zadanie 81. Niech $X_1, \ldots, X_{16}$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_{16}$ nie są w pełni obserwowalne. Obserwujemy zmienne losowe $Y_i = \min\{X_i, 10\}$. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ na podstawie następującej próbki

$$(Y_1, \ldots, Y_{16}) = (4, 8, 10, 5, 10, 9, 7, 5, 8, 10, 6, 10, 3, 10, 6, 10).$$

Odp. 16

Zadanie 82. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne i mają identyczny rozkład dany gęstością

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 4\theta x^3 \exp(-\theta x^4), & \text{dla } x > 0, \\ 0. & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Niech T_n oznacza estymator największej wiarogodności funkcji $g(\theta) = P_\theta(X_1 > 1) = e^{-\theta}$ wyznaczony w oparciu o próbę losową $X_1, \ldots, X_n$. Niech $\theta = 2$. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|T_n - e^{-2}|\sqrt{n} > 2e^{-2}\} = 0.32$.
Odp. —

Estymatory najmniejszych kwadratów

Zadanie 83. Rozważmy model regresji liniowej

$$Y_i = ax_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i nieznaną wariancją σ^2, x_1, x_2, x_3, x_4 są nielosowymi punktami z przedziału $[0, 3]$, natomiast a jest nieznanym współczynnikiem. Dla jakich x_1, x_2, x_3, x_4 wariancja estymatora $\hat{a}$ otrzymanego metodą najmniejszych kwadratów jest najmniejsza?
Odp. $(3, 3, 3, 3)$

Zadanie 84. Obserwujemy zmienną y_t oraz zmienne $[x_{t,1} \ldots, x_{t,K}]$, co w postaci macierzowej zapisujemy:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{T,1} & \cdots & x_{T,K} \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że rząd macierzy X wynosi K, a rząd macierzy rozszerzonej $[y|X]$ wynosi $K + 1$ oraz ilość obserwacji $T > K + 1$. Niech $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_k]'$ oznacza hipotetyczny wektor współczynników regresji liniowej oraz niech $b = (X'X)^{-1}X'y$ oznacza jego estymator uzyskany zwykłą metodą najmniejszych kwadratów. Niech $e = y - Xb$ będzie wektorem reszt. Pokazać, że suma reszt jest zero wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka kombinacja liniowa kolumn macierzy X, która równa jest wektorowi jedynek.
Odp. —

Zadanie 85. Zakładamy, iż oczekiwany roczny koszt obsługi grupy ubezpieczonych jest liniową funkcją liczebności grupy (wielkości nielosowej), co możemy sformalizować następująco: $EY = ax + b$, gdzie Y jest rocznym kosztem obsługi grupy (w złotówkach), x jest ilością ubezpieczonych w grupie, natomiast a, b są nieznanymi parametrami. Zakłada się ponadto, że $VarY$ nie zależy od x. Zanotowano roczny koszt obsługi dla czterech grup o różnych liczebnościach:

x	50	100	200	500
Y	2000	3000	7000	9000

Do estymacji parametrów a, b stosujemy estymator najlepszy wśród wszystkich estymatorów liniowych i równocześnie nieobciążonych. Jaka jest wyestymowana wartość kosztu stałego (parametru b)?
Odp. 2050

Zadanie 86. Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$. Obserwujemy dwudziestoelementową próbkę, w której $x_1 = \cdots = x_{10} = 1$ i $x_{11} = \cdots = x_{20} = 3$. Zmienne losowe $Y_1, \ldots, Y_{20}$ są niezależne i błędy mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0, przy czym $Var\varepsilon_i = \sigma^2$, gdy $i = 1, \ldots, 10$ i $Var\varepsilon_i = 4\sigma^2$, gdy $i = 11, \ldots, 20$. Wyznaczono estymatory $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$ parametrów β_0 i β_1 wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów, czyli minimalizując wielość $\sum_{i=1}^{20}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$. Wyznaczyć stałe z_0 i z_1 tak, aby $P(|\hat{\beta}_0 - \beta_0| < z_0\sigma) = 0.95$ i $P(|\hat{\beta}_1 - \beta_1| < z_1\sigma) = 0.95$.
Odp. $z_0 = 1.18$ i $z_1 = 0.69$

Zadanie 87. Zakładamy, że zależność czynnika Y od nielosowego czynnika x opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Obserwujemy pięcioelementową próbkę, w której $x_i = i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 5$. Zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ są niezależne i błędy mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0, przy czym $Var\varepsilon_i = i\sigma^2$, gdy $i = 1, 2, \ldots, 5$. Wyznaczono estymator $\hat{\beta}$ parametru β wykorzystując ważoną metodę najmniejszych kwadratów, to znaczy minimalizując sumę $\sum_{i=1}^{5} \frac{(Y_i - \beta x_i)^2}{Var\varepsilon_i}$. Wyznaczyć stałą z tak, by $\mathrm{P}(|\hat{\beta} - \beta| < z\sigma) = 0.95$.
Odp. 0.51

Zadanie 88. Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$. Obserwujemy dziesięcioelementową próbkę, w której $x_1 = \dots = x_5 = 1$ i $x_6 = \dots = x_{10} = 4$. Zmienne losowe są $Y_1, \dots, Y_{10}$ niezależne i błędy mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej zero, przy czym $Var\varepsilon_i = \sigma^2$ dla $i = 1, \dots, 5$ oraz $Var\varepsilon_i = 9\sigma^2$ dla $i = 6, \dots, 10$. Wyznaczono estymatory $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$ parametrów β_0 i β_1 wykorzystując ważoną metodę najmniejszych kwadratów, to znaczy minimalizując sumę $\sum_{i=1}^{10} \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{Var\varepsilon_i}$. Wyznaczyć stałe z_0 i z_1 tak, aby $P(|\hat{\beta}_0 - \beta_0| < z_0\sigma) = 0.95$ i $P(|\hat{\beta}_1 - \beta_1| < z_1\sigma) = 0.95$.
Odp. $z_0 = 1.46$ i $z_1 = 0.92$

Estymatory bayesowskie

Zadanie 89. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym

$$f_\theta(x) = P_\theta(X = x) = \theta^x(1-\theta), \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Załóżmy, że nieznany parametr θ jest realizacją zmiennej losowej Θ, która ma gęstość (*a priori*)

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 3\theta^2, & \text{dla } 0 < \theta < 1, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczyć wartość bayesowskiego estymatora parametru θ obliczona na podstawie zaobserwowanej wartości $X = 0$, czyli $E(\Theta|X = 0)$.
Odp. 0.6

Zadanie 90. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką prostą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$. Zakładamy, że nieznany parametr θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1]$. Wyznaczyć gęstość *a posteriori* $\pi(\theta|X_1, \ldots, X_n)$.
Odp. proporcjonalna do θ^{-n} na przedziale $[M, 1]$, gdzie $M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

Zadanie 91. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa Pareto o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\theta}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Przyjmując bayesowski punkt widzenia, zakładamy, że nieznany parametr θ jest zmienną losową o rozkładzie *a priori* wykładniczym z gęstością

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\theta}, & \text{dla } \theta \geq 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczyć bayesowski estymator parametru θ, czyli wartość oczekiwaną *a posteriori* $\hat{\theta} = E(\theta|X_1, \ldots, X_n)$.
Odp. $\frac{n+1}{\sum \ln X_i + \lambda}$

Zadanie 92. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2\theta}{x^3}, & \text{dla } x > \theta, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Dla parametru θ zakładamy rozkład *a priori* o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{2}, & \text{dla } \theta \in (0, 2), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczyć wartość estymatora bayesowskiego parametru θ przy kwadratowej funkcji straty, jeżeli zaobserwowano próbkę spełniającą warunek $\min\{X_1, \ldots, X_n\} = 1$.
Odp. $\frac{2n+2}{2n+3}$

Zadanie 93. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Dla parametru θ zakładamy rozkład *a priori* o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 9\theta e^{-3\theta}, & \text{dla } \theta > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Estymujemy parametr θ przy funkcji straty postaci

$$L(\theta, a) = e^{(\theta - a)} - (\theta - a) - 1.$$

Wyznaczyć estymator bayesowski a parametru θ.
Odp. $(n+2)\ln\frac{3+T}{2+T}$, gdzie $T = \sum_{i=1}^n X_i$

Zadanie 94. Niech $X_1, \ldots, X_n$, gdzie $n > 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2), & \text{dla } x > 0, \\ 0. & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr θ ma rozkład *a priori* o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \exp(-\beta\theta), & \text{dla } \theta > 0, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczyć estymator bayesowski $\hat{\theta}$ parametru θ przy funkcji straty Esschera $L(\theta, \hat{\theta}) = e^{c\theta}(\theta - \hat{\theta})^2$, gdzie $c \neq 0$ jest ustaloną liczbą.
Odp. $\frac{\alpha+n}{\beta+\sum_{i=1}^n X_i^2 - c}$