

**Zadanie 1.** Niech  $X_1, \dots, X_8$  będzie próbą z rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną  $\theta$  i wariancją 1. Nieznany parametr  $\theta$  jest z kolei zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją 1. Wyznaczyć bayesowski przedział ufności dla parametru  $\theta$ , to znaczy przedział  $[a, b]$ , gdzie  $a = a(X_1, \dots, X_8)$ ,  $b = b(X_1, \dots, X_8)$ , taki, że  $P(\theta < a | X_1, \dots, X_8) = 0.05 = P(\theta > b | X_1, \dots, X_8)$ .

**Odp.**  $[\bar{X} - 0.427, \bar{X} + 0.427]$

**Zadanie 2.**  $X_1, \dots, X_{10}$  jest próbą z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$ , gdzie  $\mu$  i  $\sigma^2$  są nieznanymi parametrami. Niech  $[L, U]$  będzie przedziałem ufności dla parametru  $\mu$  taki, że dla wszystkich  $\mu$  i  $\sigma^2$

$$P_{\mu, \sigma^2}(L > \mu) = P_{\mu, \sigma^2}(U < \mu) = 0.025.$$

Niech  $(-\infty, W]$  będzie jednostronnym przedziałem ufności dla  $\mu$  takim, że  $P_{\mu, \sigma^2}(W < \mu) = 0.01$  dla wszystkich  $\mu$  i  $\sigma^2$ . Oba przedziały ufności zbudowane są w standardowy sposób w oparciu o średnią i wariancję  $\bar{X}$  i  $S^2$  z próbki. Wiadomo, że  $L = -0.262$  i  $U = 4.262$ . Wyznaczyć  $W$ .

**Odp.** 4.821

**Zadanie 3.** Niech  $X_1, \dots, X_8$  będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale  $(0, \theta)$ , gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Znaleźć najmniejsze  $c$  takie, żeby przedział  $[\max\{X_1, \dots, X_8\}, c \max\{X_1, \dots, X_8\}]$  był przedziałem ufności dla  $\theta$  na poziomie ufności 0.9375.

**Odp.** 1.4142

**Zadanie 4.** Zakładamy, że  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  jest próbą losową z rozkładu o gęstości

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Skonstruować przedział ufności  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  dla parametru  $\theta$  (na poziomie  $1 - \alpha = 0.90$ ) tak, żeby  $P_{\theta}(\underline{\theta} < \theta) = 0.05 = P_{\theta}(\bar{\theta} > \theta)$ .

**Odp.**  $[\frac{3.4}{2S}, \frac{18.31}{2S}]$ , gdzie  $S = -\sum_{i=1}^5 \ln X_i$

**Zadanie 5.** Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą  $n$  niezależnych realizacji zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie ciągłym i niech  $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$  oznacza uporządkowaną (od wartości najmniejszych do największych) próbę. Budujemy przedział ufności dla mediany zmiennej  $X$  o postaci  $U_n = (X_2^{(n)}, X_{n-1}^{(n)})$ . Oznaczmy przez  $n^*$  najmniejszą z tych wartości  $n$ , dla których prawdopodobieństwo pokrycia mediany przez przedział  $U_n$  przekracza 0.95. Wyznaczyć  $n^*$ .

**Odp.** 9

**Zadanie 6.** Dwie niezależne próbki proste  $X_1, \dots, X_n$  i  $Y_1, \dots, Y_n$  pochodzą z tego samego rozkładu normalnego o parametrach  $\mu$  i  $\sigma^2$ . Jeden statystyk ma do dyspozycji pierwszą próbkę, drugi zaś drugą. Obaj statystycy znają wariancję  $\sigma^2$ , żaden nie zna wartości oczekiwanej  $\mu$ . Każdy z nich buduje na podstawie swojej próbki przedział ufności dla  $\mu$  na poziomie ufności 0.8. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że zbudowane przedziały okażą się rozłączne.

**Odp.** 0.07

**Zadanie 7.** Na podstawie próbki  $X_1, \dots, X_n$  z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  z nieznanymi parametrami  $\mu$  i  $\sigma^2$  budujemy przedział ufności  $(\underline{\sigma^2}, \bar{\sigma^2})$  dla wariancji na poziomie ufności 0.95. Metodę wybieramy możliwie prostą, korzystając na przykład z przybliżenia rozkładu chi-kwadrat z  $k$  stopniami swobody rozkładem normalnym  $N(k, 2k)$ . Względny błąd estymacji przedziałowej mierzymy za pomocą ilorazu  $R = \frac{\bar{\sigma^2} - \underline{\sigma^2}}{2\sigma^2}$ . Dla jakiego rozmiaru  $n$  próbki  $E(R) \approx 0.01$ .

**Odp.** 75000

**Zadanie 8.** Jacek i Placek dostaną próbkę prostą  $X_1, \dots, X_{10}$  z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$ . Oba nie znają wartości oczekiwanej  $\mu$ , ale Jacek zna wariancję  $\sigma^2$ , a Placek jej nie zna. Oba budują w standardowy sposób przedziały ufności dla  $\mu$  na poziomie ufności 0.95. Placek się chwali: „mam szansę 10%, że mój przedział ufności będzie przynajmniej  $x$  razy krótszy, niż Twój”. Znaleźć  $x$ .

**Odp.**  $x \approx 1.25$

**Zadanie 9.** Niech  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Parametr  $\theta$  jest nieznan. Wiadomo, że estymatorem największej wiarygodności tego parametru jest  $\hat{\theta} = 5/S_5$ , gdzie  $S_5 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ . Należy zbudować przedział ufności dla parametru  $\theta$  postaci

$$[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = \left[ \frac{a}{S_5}, \frac{\bar{a}}{S_5} \right].$$

Żądamy, żeby ten przedział był symetryczny w tym sensie, że  $P_{\theta}(\theta < \underline{\theta}) = P_{\theta}(\theta > \bar{\theta})$ . Wyznaczyć stałe  $a$  i  $\bar{a}$  tak, żeby otrzymać przedział na poziomie ufności 0.95.

**Odp.**  $a = 1.62$ .  $\bar{a} = 10.24$

**Zadanie 10.** Niech  $X_1, \dots, X_{20}$  będzie próbką losową z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$ , z nieznanymi parametrami  $\mu$  i  $\sigma^2$ . Niech

$$\bar{X}_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i, \quad \bar{X}_{20} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i, \quad S^2 = S_{10}^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X}_{10})^2.$$

Należy skonstruować przedział  $[\bar{X}_{10} - aS, \bar{X}_{10} + aS]$  taki, że  $P_{\mu, \sigma^2}(\bar{X}_{20} \in [\bar{X}_{10} - aS, \bar{X}_{10} + aS]) = 0.95$ . Wyznaczyć odpowiednią liczbę  $a$ .

**Odp.**  $2.2622/\sqrt{20}$

**Zadanie 11.** Załóżmy, że  $X_1, \dots, X_9$  jest próbką z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  z nieznanymi parametrami  $\mu$  i  $\sigma^2$ . Pan Ixiński miał podać przedział ufności dla  $\mu$  na poziomie 0.95, ale nie znalazł tablic rozkładu  $t$ . Ponieważ miał tablice rozkładu normalnego i chi-kwadrat, więc poradził sobie tak:

1. obliczył w standardowy sposób jednostronny przedział ufności  $[0, \bar{\sigma}^2]$  dla wariancji, na poziomie 0.95;
2. przyjął, że  $\left[ \bar{X} - \frac{1.96\bar{\sigma}}{\sqrt{9}}, \bar{X} + \frac{1.96\bar{\sigma}}{\sqrt{9}} \right]$  jest potrzebnym przedziałem dla wartości oczekiwanej, gdzie  $\bar{\sigma}$  zostało wyznaczone w punkcie 1.

Obliczyć faktyczny poziom ufności takiego przedziału ufności dla  $\mu$ .

**Odp.**  $\approx 0.99$

**Zadanie 12.** Mamy pięć niezależnych próbek z tego samego rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  z nieznaną wartością oczekiwaną  $\mu$  i znaną wariancją  $\sigma^2$ , przy tym każda z tych próbek ma tę samą liczebność  $n$ . Dla każdej z pięciu próbek oddzielnie wyznaczamy w standardowy sposób przedział ufności dla  $\mu$ . Niech  $\left[ \bar{X}_i - \frac{1.15035\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_i + \frac{1.15035\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  będzie przedziałem obliczonym na podstawie  $i$ -tej próbki (liczba 1.15035 jest kwantylem rzędu 0.875 standardowego rozkładu normalnego). Następnie, przedział ufności oparty na wszystkich  $5n$  obserwacjach wyznaczamy w sposób niestandardowy: za środek przedziału wybieramy medianę  $m = \text{med}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4, \bar{X}_5)$ . Obliczyć (z dokładnością do 0.01)

$$P_{\mu} \left( m - \frac{1.15035\sigma}{\sqrt{n}}, m + \frac{1.15035\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

**Odp.** 0.97

**Zadanie 13.** Załóżmy, że  $X_1, \dots, X_6$  jest próbą z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  z nieznanymi parametrami. Zadanie polega na zbudowaniu przedziału ufności dla wariancji  $\sigma^2$ . Żądany poziom ufności jest równy  $1 - \alpha = 0.99$ . Rozpatrzmy dwie metody:

**Metoda S** jest standardowa: budujemy przedział postaci  $[0, G_S]$ , gdzie  $G_S = \frac{5S^2}{c}$ , ( $S^2$  oznacza nieobciążony estymator wariancji, zaś  $c$  jest odpowiednim kwantylem rozkładu chi-kwadrat);

**Metoda N** polega na podziale próbki na dwie części. Podpróbkę  $X_1, X_2, X_3$  wykorzystujemy do zbudowania przedziału ufności  $[0, G_{123}]$ , zaś podpróbkę  $X_4, X_5, X_6$  do zbudowania przedziału  $[0, G_{456}]$ . Oba te przedziały obliczamy niezależnie w standardowy sposób przyjmując poziom ufności  $1 - \sqrt{\alpha} = 0.90$ . Ostatecznie naszym przedziałem ufności jest  $[0, G_N]$ , gdzie  $G_N = \max\{G_{123}, G_{456}\}$ .

Porównać średnie długości przedziałów otrzymanych obiema metodami.

**Odp.**  $EG_N = 1.58EG_S$

**Zadanie 14.** Każda ze zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_{100}$  ma rozkład normalny  $N(\mu, \sigma^2)$  z nieznaną wartością oczekiwaną  $\mu$  i znaną wariancją  $\sigma^2$ . Założono, że zmienne są niezależne i w standardowy sposób zbudowano dla  $\mu$  przedział ufności na poziomie ufności 0.95:

$$\left[ \bar{X} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{10}}, \bar{X} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{10}} \right].$$

W rzeczywistości zmienne  $X_1, \dots, X_{100}$  mają łączny rozkład normalny, ale są skorelowane,  $Corr(X_i, X_j) = 0.1$  dla wszystkich  $i \neq j$ . Obliczyć faktyczny poziom ufności.

**Odp.** 0.45

**Zadanie 15.** Próbką  $X_1, \dots, X_{14}$  pochodzi z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  z nieznaną wartością oczekiwaną  $\mu$  i nieznaną wariancją  $\sigma^2$ . Na podstawie tej próbki zbudowano dla  $\mu$  w standardowy sposób przedział ufności na poziomie ufności  $1 - \alpha = 0.995$

$$\left[ \bar{X}_{14} - \frac{S \cdot t}{\sqrt{14}}, \bar{X}_{14} + \frac{S \cdot t}{\sqrt{14}} \right].$$

Niech  $X_{15}$  będzie zmienną losową pochodzącą z tego samego rozkładu, niezależną od  $X_1, \dots, X_{14}$ . Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że  $X_{15}$  należy do uprzednio wyznaczonego przedziału ufności:

$$P_{\mu, \sigma^2} \left( \bar{X}_{14} - \frac{S \cdot t}{\sqrt{14}} \leq X_{15} \leq \bar{X}_{14} + \frac{S \cdot t}{\sqrt{14}} \right).$$

**Odp.** 0.60

**Zadanie 16.** Załóżmy, że  $X_1, \dots, X_4$  jest próbą z rozkładu normalnego  $N(\mu, 1)$ , zaś  $Y_1, \dots, Y_9$  jest próbą z rozkładu normalnego  $N(\mu, 4)$ ,  $\mu$  jest nieznanym parametrem. Niech  $\bar{X} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 Y_i$ . Znaleźć takie liczby  $r$  i  $d$ , żeby przedział

$$[r\bar{X} + (1-r)\bar{Y} - d, r\bar{X} + (1-r)\bar{Y} + d]$$

był przedziałem ufności dla  $\mu$  na poziomie ufności  $1 - \alpha = 0.95$  i przy tym długość tego przedziału ( $2d$ ) była najmniejsza.

**Odp.**  $r = 0.64$ ,  $d = 0.784$

**Zadanie 17.** Załóżmy, że zmienne losowe  $X_1, \dots, X_{10}$  są niezależne i mają rozkłady normalne. Zmienna  $X_i$  ma rozkład  $N(\mu, \frac{1}{i})$ , innymi słowy  $EX_i = \mu$ ,  $Var X_i = \frac{1}{i}$  dla  $i = 1, \dots, 10$ . Wartość oczekiwana  $\mu$  (jednakowa dla wszystkich zmiennych) jest nieznaną. Należy zbudować przedział ufności dla  $\mu$  na poziomie  $1 - \alpha = 0.95$ . Przedział ma być postaci  $[\hat{\mu} - d, \hat{\mu} + d]$ , gdzie  $\hat{\mu}$  jest estymatorem największej wiarygodności parametru  $\mu$ . Podać liczbę  $d$  taką, że

$$P_{\mu} (\hat{\mu} - d < \mu < \hat{\mu} + d) = 0.95.$$

**Odp.** 0.3354

**Zadanie 18.** Rozważmy próbkę  $X_1, \dots, X_n$  z rozkładu jednostajnego na odcinku  $[0, \theta]$  (z nieznanym prawym końcem  $\theta$ ). Niech  $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . Należy zbudować przedział ufności dla  $\theta$  na poziomie 90%. Chcemy, żeby ten przedział był postaci  $[aM, bM]$ , gdzie liczby  $a$  i  $b$  są tak dobrane, żeby

$$P_\theta(\theta < aM) = P_\theta(\theta > bM) = 0.05.$$

Podać długość tego przedziału.

**Odp.**  $\left(\sqrt[n]{20} - \sqrt[n]{\frac{20}{19}}\right) M$

**Zadanie 19.** Załóżmy, że  $X_1, \dots, X_4$  jest próbką z rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  o nieznannej wartości oczekiwanej i nieznannej wariancji, zaś jest  $X_5$  zmienną losową z tego samego rozkładu, niezależną od próbki. Interpretujemy zmienną  $X_5$  jako kolejną obserwację, która pojawi się w przyszłości, ale obecnie jest nieznaną. Zbudować „przedział ufności”

$$[L, U] = [L(X_1, \dots, X_4), U(X_1, \dots, X_4)]$$

oparty na próbce  $X_1, \dots, X_4$  taki, że

$$P_{\mu, \sigma^2}(L(X_1, \dots, X_4) \leq X_5 \leq U(X_1, \dots, X_4)) = 0.95,$$

przy tym żądamy, żeby przedział był symetryczny, tzn.  $\frac{1}{2}(L + U) = \bar{X}$ . Używamy tutaj oznaczeń:

$$\bar{X} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i, \quad S^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 (X_i - \bar{X})^2.$$

**Odp.**  $L = \bar{X} - 3.558S, U = \bar{X} + 3.558S$

**Zadanie 20.** Zakładamy, że  $X_1, \dots, X_{10}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym  $EX_i = \mu$  i  $Var X_i = \frac{\sigma^2}{w_i}$ . Parametry  $\mu$  i  $\sigma^2$  są nieznanymi, a wagi  $w_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) są znane. Zbudować przedział ufności  $[\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2]$  dla  $\sigma^2$  na poziomie ufności  $1 - \alpha = 0.9$ .

**Odp.**  $\left[ \frac{\sum_{i=1}^{10} w_i (X_i - \bar{X}_w)^2}{16.9190}, \frac{\sum_{i=1}^{10} w_i (X_i - \bar{X}_w)^2}{3.3251} \right]$ , gdzie  $\bar{X}_w = \frac{\sum_{i=1}^{10} w_i X_i}{\sum_{i=1}^{10} w_i}$

**Zadanie 21.** Losujemy  $n$  ( $n \geq 3$ ) niezależnych realizacji zmiennej losowej z rozkładu jednostajnego na przedziale  $(0, \theta)$ . Po uporządkowaniu zaobserwowanych wartości w ciąg rosnący  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tworzymy przedział  $(2x_1, 2x_{n-1})$ . Dobrać najmniejsze  $n$ , przy którym prawdopodobieństwo tego, że tak utworzony przedział pokrywa wartość parametru  $\theta$  jest większe niż 0.9.

**Odp.** 7

**Zadanie 22.** Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto( $1, a_1$ ), a  $Y_1, \dots, Y_m$  będą zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto( $1, a_2$ ), gdzie  $a_1, a_2 > 0$  są nieznanymi parametrami. Wszystkie zmienne są niezależne. Na poziomie ufności  $1 - \alpha$  budujemy przedział ufności  $[dT, cT]$  dla ilorazu parametrów  $\frac{a_1}{a_2}$  na podstawie estymatora największej wiarygodności  $T$  tego ilorazu w ten sposób, że

$$P_{a_1, a_2} \left( cT < \frac{a_1}{a_2} \right) = P_{a_1, a_2} \left( dT > \frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Wyznaczyć długość przedziału ufności, gdy  $\alpha = 0.1, m = 4, n = 5$ .

**Odp.**  $3.02T$

**Zadanie 23.** Niech  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z następującymi parametrami: nieznaną wartością oczekiwaną  $EX_i = EY_i = \mu$ , wariancją  $VarX_i = \frac{1}{4}$ ,  $VarY_i = 1$  i współczynnikiem korelacji  $Corr(X_i, Y_i) = 0.5$ . Osobno na podstawie prób losowych  $X_1, \dots, X_n$  i  $Y_1, \dots, Y_n$  zbudowano dwa przedziały ufności dla wartości oczekiwanej  $\mu$ , każdy na poziomie ufności 0.8. Obliczyć prawdopodobieństwo, że tak zbudowane przedziały okażą się rozłączne.

**Odp.** 0.03

**Zadanie 24.** Zakładamy, że  $X_1, \dots, X_{12}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym  $EX_i = \mu$  i  $VarX_i = \frac{\sigma^2}{i}$ , gdzie parametry  $\mu \in R$  i  $\sigma^2 > 0$  są nieznanymi. Budujemy przedział ufności  $[\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2]$  dla parametru  $\sigma^2$  na poziomie ufności 0.9. Niech  $\bar{X} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} X_i$  i  $\bar{X}_w = \frac{1}{78} \sum_{i=1}^{12} iX_i$ . Wyznaczyć  $\hat{\sigma}_1^2$  i  $\hat{\sigma}_2^2$  tak, by  $P_{\mu, \sigma^2}(\hat{\sigma}_1^2 > \sigma^2) = P_{\mu, \sigma^2}(\hat{\sigma}_2^2 < \sigma^2) = 0.05$ .

**Odp.**  $\frac{\sum_{i=1}^{12} i(X_i - \bar{X}_w)^2}{19.6752}$  i  $\frac{\sum_{i=1}^{12} i(X_i - \bar{X}_w)^2}{4.5748}$

**Zadanie 25.** Dysponując pięcioma niezależnymi próbkami losowymi o tej samej liczebności  $n$ , z tego samego rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  z nieznaną wartością oczekiwaną  $\mu$  i znaną wariancją  $\sigma^2$ , zbudowano pięć standardowych przedziałów ufności dla parametru  $\mu$  postaci  $[\bar{X}_i - 1.2816 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_i + 1.2816 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ , gdzie  $\bar{X}_i$  jest średnią z obserwacji w  $i$ -tej próbce,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Następnie zbudowano przedział ufności dla parametru  $\mu$  postaci

$$\left[ m - 1.2816 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + 1.2816 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

gdzie  $m = med\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ . Wyznaczyć

$$P_\mu \left[ m - 1.2816 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m + 1.2816 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

**Odp.** 0.98288

**Zadanie 26.** Niech  $X_1, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu Weibulla o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 3\theta x^2 \exp(-\theta x^3), & \text{dla } x > 0, \\ 0, & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie  $\theta > 0$  jest nieznanym parametrem. Przedział ufności dla parametru  $\theta$  w oparciu o estymator największej wiarygodności  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$  parametru  $\theta$  otrzymujemy rozwiązując nierówność

$$\left| \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} \sqrt{n} \right| \leq z,$$

gdzie  $\sigma^2(\theta)$  jest wariancją asymptotyczną statystyki  $\hat{\theta}_n$  i liczba  $z$  spełnia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left( \left| \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)} \sqrt{n} \right| \leq z \right) = 0.95.$$

Wyznaczyć postać przedziału ufności.

**Odp.**  $\left[ \frac{n\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^3(\sqrt{n}+1.96)}, \frac{n\sqrt{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^3(\sqrt{n}-1.96)} \right]$