1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu skoncentrowanego na dodatniej półosi i niech gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem $\theta^2 x e^{-\theta x}$, $\theta > 0$. Wyznaczyć estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru θ.

Zadanie rozwiążemy w trzech krokach:
1. pokażemy, że rozkład jest z rodziny wykładniczej;
2. znajdziemy minimalną i zupełną statystykę dostateczną dla θ;
3. znajdziemy estymator nieobciążony oparty na statystyce dostatecznej - z twierdzenia Rao-Blackwela wynika, że jest to poszukiwany estymator.

Rozkład próby ma gęstość $\theta^{2n} \prod_{i=1}^n x_i \exp\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\}$. Tę gęstość można zapisać w następującej postaci wykładniczej

$$\exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i - 2n \log \theta\right\} \prod_{i=1}^n x_i.$$

Z twierdzenia o faktoryzacji wynika, że $T = \sum_{i=1}^n X_i$ jest statystyką dostateczną dla parametru θ, a ponieważ rozważany rozkład należy do wykładniczej rodziny rozkładów, więc jest to statystyka minimalna i zupełna. Każda z niezależnych zmiennych losowych X_i ma rozkład Gamma z parametrami $(2, \theta)$. Tak więc zmienna losowa T ma rozkład Gamma z parametrami $(2n, \theta)$. Wartość oczekiwana tej zmiennej losowej wynosi $\frac{2n}{\theta}$. Sugeruje to, że poszukiwany estymator oparty będzie na statystyce $\frac{1}{T}$.
Wyznaczamy wartość oczekiwaną zmiennej losowej $1/T$:

$$E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(\frac{\theta^{2n}}{\Gamma(2n)} t^{2n-1} e^{-\theta t}\right) dt = \frac{\theta^{2n}\Gamma(2n-1)}{\theta^{2n-1}\Gamma(2n)} = \frac{\theta}{2n-1}$$

A zatem poszukiwanym estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji parametru θ jest

$$\frac{2n-1}{\sum_{i-1}^n X_i}$$

2. Niech X_{ij}, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, n_i$ będą wynikami lotniczych pomiarów kątów $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ pewnego czworokąta na powierzchni ziemi. Założyć, że obserwacje obciążone są błędami, które są niezależne, mają wartość oczekiwaną zero i taką samą wariancję σ^2 i przy tych założeniach wyznaczyć estymator najmniejszych kwadratów poszczególnych kątów. Wyznaczyć nieobciążony estymator wariancji σ^2.

Obserwacje zapisujemy w postaci:

$$X_{ij} = \theta_i + \varepsilon_{ij},\ i = 1, 2, 3, 4,\ j = 1, \ldots, n_i$$

gdzie ε_{ij} oznacza błąd j–tego pomiaru i–tego kąta. Obserwacje możemy zapisać w postaci następującego modelu liniowego

$$\underline{X} = \underline{A}\underline{\theta} + \underline{\varepsilon},$$

gdzie $\underline{X}$ oznacza kolumnowy wektor pomiarów uporządkowanych leksykograficznie, $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$, $\underline{\varepsilon}$ oznacza wektor błędów (uporządkowany leksykograficznie) oraz $\underline{A}$ jest macierzą o wymiarach $n \times 4$ ($n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$) postaci

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{1}_{n_1} & \underline{0}_{n_1} & \underline{0}_{n_1} & \underline{0}_{n_1} \\ \underline{0}_{n_2} & \underline{1}_{n_2} & \underline{0}_{n_2} & \underline{0}_{n_2} \\ \underline{0}_{n_3} & \underline{0}_{n_3} & \underline{1}_{n_3} & \underline{0}_{n_3} \\ \underline{0}_{n_4} & \underline{0}_{n_4} & \underline{0}_{n_4} & \underline{1}_{n_4} \end{bmatrix}$$

Tutaj $\underline{1}$ oraz $\underline{0}$ oznaczają kolumnowe wektory jedynek i zer odpowiednio.
Ze względu na to, że mierzone są kąty czworokąt, to należy uwzględnić to, że $\theta_1 + \cdots + \theta_4 = 2\pi$. Mamy więc jeden warunek ograniczający, który w zapisie macierzowym ma postać $\underline{1}_4^T \underline{\theta} = 2\pi$. W celu znalezienia estymatora najmniejszych kwadratów wektora $\underline{\theta}$ przy powyższym warunku należy znaleźć wektor minimalizujący funkcję Lagrange'a:

$$h(\underline{\theta}, \lambda) = (\underline{X} - \underline{A}\underline{\theta})^T(\underline{X} - \underline{A}\underline{\theta}) + \lambda(\underline{1}_4^T \underline{\theta} - 2\pi).$$

Obliczają pochodne cząstkowe (względem $\underline{\theta}$ oraz λ) powyższej funkcji i przyrównując je do zera otrzymujemy układ równań normalnych

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^T\underline{A} & \underline{1}_4 \\ \underline{1}_4^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\theta} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^T\underline{X} \\ 2\pi \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\underline{A}^T\underline{A} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_4 \end{bmatrix}$$

więc (korzystając ze wzoru na odwrotność macierzy blokowej)

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^T\underline{A} & \underline{1}_4 \\ \underline{1}_4^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{n} & \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n_3} - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n_4} - \frac{1}{n} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Estymatorami najmniejszych kwadratów poszczególnych kątów są więc

$$\hat{\theta}_i = \bar{X}_i - \bar{X} + \frac{\pi}{4},\ i = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ oraz $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$. Nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2 jest

$$S^2 = \frac{1}{n - \text{rząd}(A)}\|\underline{X} - \underline{A}\hat{\underline{\theta}}\|^2 = \frac{1}{n - \text{rząd}(A)}(\underline{X} - \underline{A}\hat{\underline{\theta}})^T(\underline{X} - \underline{A}\hat{\underline{\theta}}).$$

W naszym zadaniu

$$S^2 = \frac{1}{n-4}\left[\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + n\left(\bar{X} - \frac{\pi}{4}\right)^2\right].$$

3. Na podstawie próbki losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozkładu wykładniczego o gęstości $\theta e^{-x\theta}$ wyznaczyć najkrótszy przedział ufności dla parametru θ.

Niech $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Pokażemy, że $T(\underline{X}, \theta) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\theta}$ jest funkcją centralną (oczywiście $\theta > 0$).
1. Dla każdego ustalonego $\underline{X}$ funkcja $T(\underline{X}, \cdot)$ jest funkcją monotoniczną (malejącą).
2. Z lekcji rachunku prawdopodobieństwa wiadomo, że $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład o gęstości $\frac{\theta^n}{\Gamma(n)} u^{n-1} \exp\{-u\theta\}$ (rozkład Gamma z parametrami n oraz θ). A zatem, dla każdego θ, funkcja $T(\cdot, \theta)$, traktowana jako zmienna losowa ma rozkład o gęstości $\frac{1}{\Gamma(n)} u^{n-1} \exp\{-u\}$, czyli rozkład Gamma z parametrami n oraz 1. Jest to rozkład niezależny od nieznanego parametru θ.

Dla zadanego poziomu ufności γ, istnieją dwie takie liczby c_1 oraz c_2, że

$$P\{c_1 < \Gamma(n,1) < c_2\} = \gamma,$$

gdzie $\Gamma(n,1)$ oznacza zmienną losową o rozkładzie Gamma z parametrami n oraz 1. Mamy więc

$$P\left\{c_1 < \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\theta} < c_2\right\} = \gamma.$$

Przedział ufności (na poziomie ufności γ) dla parametru θ ma zatem postać:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{c_2} < \theta < \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{c_1}\right).$$

Ponieważ mamy znaleźć najkrótszy przedział ufności, więc mamy znaleźć takie liczby c_1 oraz c_2, by

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \text{ było najmniejsze}$$

przy warunku

$$P\{c_1 < \Gamma(n,1) < c_2\} = F(c_2) - F(c_1) = \gamma.$$

Tutaj $F(\cdot)$ oznacza dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej $\Gamma(n,1)$. W celu znalezienia rozwiązania budujemy funkcję Lagrange'a:

$$h(c_1, c_2, \lambda) = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) + \lambda\left(F(c_2) - F(c_1) - \gamma\right).$$

Wyznaczamy pochodne funkcji Lagrange'a i przyrównując je do zera otrzymujemy układ równań ($f(\cdot)$ oznacza gęstośc rozkładu zmiennej losowej $\Gamma(n,1)$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(c_1, c_2, \lambda)}{\partial c_1} &= -\frac{1}{c_1^2} - \lambda f(c_1) = 0 \\
\frac{\partial h(c_1, c_2, \lambda)}{\partial c_2} &= \frac{1}{c_2^2} + \lambda f(c_2) = 0 \\
\frac{\partial h(c_1, c_2, \lambda)}{\partial \lambda} &= F(c_2) - F(c_1) - \gamma = 0
\end{aligned}$$

Poszukiwane liczby c_1 oraz c_2 są rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} c_1^2 f(c_1) = c_2^2 f(c_2) \\ F(c_2) - F(c_1) = \gamma \end{cases}$$

Ten układ można rozwiązać numerycznie (dla danego n). Uzyskane liczby dadzą najkrótszy przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności γ.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym parametry μ i σ^2 są nieznane. Skonstruować test hipotezy zerowej, że $\sigma = \sigma_0$ wobec hipotezy alternatywnej $\sigma \neq \sigma_0$.

Skonstruujemy test dla równoważnego problemu $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ przeciwko $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Ponieważ obie hipotezy są hipotezami złożonymi, więc test będziemy konstruować w oparciu o iloraz wiarogodności:

$$\text{hipotezę } H_0 \text{ odrzucamy, jeżeli } \Lambda(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sup_{\mu \in R, \sigma^2 > 0} L(\mu, \sigma^2; X_1, \ldots, X_n)}{\sup_{\mu \in R, \sigma^2 = \sigma_0^2} L(\mu, \sigma^2; X_1, \ldots, X_n)} > u$$

gdzie u jest taką stałą, że test ma zadany poziom istotności α, natomiast $L(\mu, \sigma^2; X_1, \ldots, X_n)$ jest funkcją wiarogodności. W rozpatrywanym modelu gaussowskim funkcja wiarogodności ma postać

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\sigma^2 2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\}$$

Z definicji estymatorów największej wiarogodności wiadomo, że

$$\sup_{\mu \in R, \sigma^2 > 0} L(\mu, \sigma^2; X_1, \ldots, X_n) = L(\bar{X}, S^2; X_1, \ldots, X_n)$$

gdzie

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

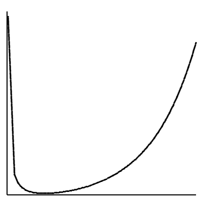
są estymatorami największej wiarogodności odpowiednich parametrów modelu gaussowskiego.
Jak łatwo policzyć

$$\sup_{\mu \in R, \sigma^2 = \sigma_0^2} L(\mu, \sigma^2; X_1, \ldots, X_n) = L(\bar{X}, \sigma_0^2; X_1, \ldots, X_n)$$

Zatem, po dokonaniu podstawień, otrzymujemy

$$\Lambda(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\left(1/S^2 2\pi\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}}{\left(1/\sigma_0^2 2\pi\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{n}{2} \frac{S^2}{\sigma_0^2}\right\}}$$

Jak łatwo zauważyć, iloraz wiarogodności jest funkcją postaci $\frac{1}{t} \exp\{t - 1\}$, gdzie $t = S^2/\sigma_0^2$. Szkic wykresu tej funkcji poniżej.



Zatem, nierówność $\Lambda(X_1, \ldots, X_n) > u$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{S^2}{\sigma_0^2} < c_1 \quad \text{lub} \quad \frac{S^2}{\sigma_0^2} > c_2$$

Liczby c_1 i c_2 dobrane są tak, by test miał poziom istotności α, to znaczy by był spełniony warunek

$$\sup_{\mu \in R} P_{\mu, \sigma_0^2} \left\{ \frac{S^2}{\sigma_0^2} < c_1 \quad \text{lub} \quad \frac{S^2}{\sigma_0^2} > c_2 \right\} = \alpha$$

Do znalezienia liczb c_1 oraz c_2 wykorzystujemy fakt, że jeżeli hipoteza zerowa jest prawdziwa, to (dla każdego $\mu \in R$) zmienna losowa $(n-1)S^2/\sigma_0^2$ ma rozkład chi-kwadrat z $n-1$ stopniami swobody.