1. W celu oszacowania ilości N ryb w jeziorze wyławia się m ryb, znakuje się je i wpuszcza z powrotem do jeziora. Po pewnym czasie, gdy oznakowane ryby rozproszą się po całym jeziorze, wyławia się n ryb i wyznacza wśród nich ilość r ryb oznakowanych. Skonstruować na tej podstawie ENMW ogólnej ilości ryb. (Można założyć, że liczba n jest mała w porównaniu z N.)

2. Bada się liczbę wad na metrze bieżącym produkowanego materiału. Stwierdzono, że X_i zbadanych metrów materiału miało dokładnie i wad ($i = 1, 2, \ldots, \sum X_i = N$). Zakłada się, że liczba wad na metrze jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią λ, przy czym w badaniach odrzucano zerowe obserwacje (tzn. te kawałki na których nie zaobserwowano wad). Pokazać, że $\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{\infty} iX_i$ jest nieobciążonym estymatorem średniej λ rozkładu Poissona i wyznaczyć efektywność tego estymatora.

3. Bada się liczbę wad na metrze bieżącym produkowanego materiału. Stwierdzono, że X_i zbadanych metrów materiału miało dokładnie i wad ($i = 1, 2, \ldots, \sum X_i = N$). Zakłada się, że liczba wad na metrze jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią λ, przy czym w badaniach odrzucano zerowe obserwacje (tzn. te kawałki na których nie zaobserwowano wad). Wyznaczyć ENW parametru λ.

4. Całkowity zysk Y z produkcji jest uzależniony od jej wielkości x, przy czym zakładamy, że

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Przyjmujemy, że liczby $x_1, \ldots, x_n$ są znane, natomiast $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $N(0, \sigma^2)$ (wariancja σ^2 nie jest znana). Skonstruować ENW wielkości $\varphi = -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$.

5. Niech X_1, X_2, X_3 będą wynikami lotniczych pomiarów kątów $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ pewnego trójkąta na powierzchni ziemi. Założyć, że obserwacje obciążone są błędami, które są niezależne, mają wartość oczekiwaną zero i taką samą wariancję σ^2 i przy tych założeniach wyznaczyć EMNK wielkości θ. Wyznaczyć nieobciążony estymator wariancji σ^2.

6. Pewne trzy substancje mogą być ważone tylko w opakowaniu. Chcemy oszacować jednostkowy ciężar tych substancji mając do dyspozycji wagę sprężynową. Wykonano cztery pomiary według następującego schematu:

Nr	Ważenie	Wynik
1	substancja 1 w opakowaniu	Y_1
2	substancja 2 w opakowaniu	Y_2
3	substancja 3 w opakowaniu	Y_3
4	opakowanie	Y_4

Zakładając, że błędy pomiarowe są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero i wariancji σ^2 wyznaczyć EMNK jednostkowych ciężarów poszczególnych substancji oraz macierz kowariancji tych estymatorów.

7. Pewien produkt chemiczny można wytwarzać bez użycia katalizatora, ale przypuszcza się, że w obecności katalizatorów wydajność procesu będzie większa. Dla zbadania tego zagadnienia przeprowadzono pięć doświadczeń według następującego schematu:

Doświadczenie	Warunki	Wydajność
1	bez katalizatora	Y_1
2	katalizator A w ilości a_1	Y_2
3	katalizator A w ilości $2a_1$	Y_3
4	katalizator B w ilości a_2	Y_4
5	katalizator B w ilości $2a_2$	Y_5

Zakładając liniową regresję między wydajnością procesu i ilością każdego z katalizatorów oraz normalność rozkładu błędów pomiarów skonstruować przedział ufności dla „poziomu bezkatalizatorowego".

8. Pewien deterministyczny proces $y_0, y_1, \ldots, y_n$ przebiega tak, że

$$y_{i+1} = ay_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

przy czym a jest znaną stałą. Wielkości y_i nie mogą być obserwowane bezbłędnie, lecz ich obserwacje $X_0, X_1, \ldots, X_n$ mają postać

$$X_i = y_i + \varepsilon_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

gdzie ε_i są niezależnymi błędami losowymi o rozkładach $N(0, \sigma^2)$. Wyznaczyć przedział ufności dla y_0.

9. Niech X_1, X_2, X_3 będą wynikami lotniczych pomiarów kątów $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ pewnego trójkąta na powierzchni ziemi. Założyć, że obserwacje obciążone są błędami, które są niezależne i mają taki sam rozkład normalny o wartości oczekiwanej zero i wariancji σ^2. Wyznaczyć przedział ufności dla θ_1.

10. Pewne trzy substancje mogą być ważone tylko w opakowaniu. Chcemy oszacować jednostkowy ciężar tych substancji mając do dyspozycji wagę sprężynową. Wykonano cztery pomiary według następującego schematu:

Nr	Ważenie	Wynik
1	substancja 1 w opakowaniu	Y_1
2	substancja 2 w opakowaniu	Y_2
3	substancja 3 w opakowaniu	Y_3
4	opakowanie	Y_4

Zakładając, że błędy pomiarowe są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o wartości oczekiwanej zero i wariancji σ^2 wyznaczyć przedział ufności dla jednostkowego ciężaru substancji 1.

11. Niech $X_1, \ldots, X_m$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu_1, \sigma^2)$ oraz niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu_2, \sigma^2)$, przy czym średnie oraz wariancja nie są znane. Zakładamy, że próby X–ów oraz Y–ów są niezależne. Skonstruować test ilorazu wiarogodności dla hipotezy $H_0 : \mu_1 = k\mu_2$ przeciwko $H_1 : \mu_1 \neq k\mu_2$, gdzie $k \neq 0$ jest daną liczbą.

12. Niech $X_1, \ldots, X_m$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ oraz niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będzie próbą z rozkładu $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, przy czym średnie oraz wariancje nie są znane. Zakładamy, że próby X–ów oraz Y–ów są niezależne. Skonstruować test ilorazu wiarogodności dla hipotezy $H_0 : \sigma_1^2 = k\sigma_2^2$ przeciwko $H_1 : \sigma_1^2 \neq k\sigma_2^2$, gdzie $k > 0$ jest daną liczbą.

13. Niech $X_1, \ldots, X_m$ będzie próbą z rozkładu $D(p_1)$ oraz niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będzie próbą z rozkładu $D(p_2)$. Zakładamy, że próby X–ów oraz Y–ów są niezależne. Przyjmując, że n oraz m są duże skonstruować test ilorazu wiarogodności dla hipotezy $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ przeciwko $H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$.

14. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbką losową z rozkładu o gęstości $[\theta^q/\Gamma(q)]x^{q-1}e^{-\theta x}$, skoncentrowanego na dodatniej półosi rzeczywistej. Zakładamy, że q jest znane. Skonstruować najmocniejszy test na poziomie istotności α dla weryfikacji hipotezy $\{\theta_0\}$ wobec alternatywy $\{\theta_1\}$, gdzie $\theta_1 > \theta_0$. Podać szczegółowe rozwiązanie w przypadku $q = 1$ i wyznaczyć prawdopodobieństwa błędów.