Spis treści

1 Przedziały ufności

1.1 Przykład wstępny

Przedziały ufności: przykład wstępny

Model gaussowski ze znaną wariancją

$$(\mathbb{R}, \{N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}\})$$

Zadanie polega na oszacowaniu wartości średniej μ.

Jakie wartości obserwacji X są „wysoce prawdopodobne” dla różnych μ?

Przedziały ufności: przykład wstępny

Niech „wysoce prawdopodobne" wynosi 0.9. Szukamy takich $a(\mu)$ oraz $b(\mu)$, że

$$P_\mu\{X \in (a(\mu), b(\mu))\} = 0.9, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie

$$P_\mu\{X \in (a(\mu), b(\mu))\} = \Phi\left(\frac{b(\mu)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a(\mu)-\mu}{\sigma}\right)$$

Przedziały ufności: przykład wstępny

Rozwiązanie

Niech z_{α_1} oraz z_{α_2} będą takie, że

$$\Phi(z_{\alpha_2}) - \Phi(z_{\alpha_1}) = 0.9$$

$$b(\mu) = \mu + \sigma z_{\alpha_2},\ a(\mu) = \mu + \sigma z_{\alpha_1}$$

Przedziały ufności: przykład wstępny

$$P_\mu\{X \in (a(\mu), b(\mu))\} = 0.9, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$P_\mu\{\mu + \sigma z_{\alpha_1} < X < \mu + \sigma z_{\alpha_2}\} = 0.9, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$P_\mu\{X - \sigma z_{\alpha_1} < \mu < X + \sigma z_{\alpha_2}\} = 0.9, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$b(\mu) - a(\mu) = \min! \Rightarrow z_{\alpha_2} = -z_{\alpha_1} = z_{0.95}$$

Przedziały ufności: przykład wstępny

$b(\mu) - a(\mu) = \min! \Rightarrow z_{\alpha_2} = -z_{\alpha_1} = z_{0.95}$

$$b(\mu) - a(\mu) = \sigma(z_{\alpha_2} - z_{\alpha_1})$$

$$\begin{cases} \Lambda(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \lambda) = (z_{\alpha_2} - z_{\alpha_1}) + \lambda(\Phi(z_{\alpha_2}) - \Phi(z_{\alpha_1}) - 0.9) \\ \Phi(z_{\alpha_2}) - \Phi(z_{\alpha_1}) = 0.9 \end{cases}$$

Przedziały ufności: przykład wstępny

$b(\mu) - a(\mu) = \min! \Rightarrow z_{\alpha_2} = -z_{\alpha_1} = z_{0.95}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \lambda)}{\partial z_{\alpha_1}} = -1 - \lambda\phi(z_{\alpha_1}) \\ \frac{\partial \Lambda(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \lambda)}{\partial z_{\alpha_2}} = 1 + \lambda\phi(z_{\alpha_2}) \\ \Phi(z_{\alpha_2}) - \Phi(z_{\alpha_1}) = 0.9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \lambda)}{\partial z_{\alpha_1}} = 0 \\ \frac{\partial \Lambda(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \lambda)}{\partial z_{\alpha_2}} = 0 \\ \Phi(z_{\alpha_2}) - \Phi(z_{\alpha_1}) = 0.9 \end{cases}$$

Przedziały ufności: przykład wstępny

$b(\mu) - a(\mu) = \min! \Rightarrow z_{\alpha_2} = -z_{\alpha_1} = z_{0.95}$

$$\phi(z_{\alpha_1}) = \phi(z_{\alpha_2})$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_{\alpha_1} - \mu}{\sigma}\right)^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_{\alpha_2} - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{z_{\alpha_1} - \mu}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{z_{\alpha_2} - \mu}{\sigma}\right)^2$$

Przedziały ufności: przykład wstępny

$b(\mu) - a(\mu) = \min! \Rightarrow z_{\alpha_2} = -z_{\alpha_1} = z_{0.95}$

$$z_{\alpha_2} = -z_{\alpha_1}$$

$$\Phi(z_{\alpha_2}) - \Phi(z_{\alpha_1}) = 0.9$$

$$2\Phi(z_{\alpha_2}) - 1 = 0.9$$

$$z_{\alpha_2} = \Phi^{-1}(0.95)$$

1.2 Określenie i konstrukcja

Określenie

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Definicja przedziału ufności
Przedział $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ taki, że

$$P_\theta\{\theta \in (\underline{\theta}(X),\ \overline{\theta}(X))\} = 1 - \alpha,\ \forall\theta \in \Theta$$

nazywamy **przedziałem ufności** na **poziomie ufności** $1 - \alpha$.

Określenie

Definicja zbioru ufności
Zbiór $S_X \subset \Theta$ taki, że

$$P\{\theta \in S_X\} = 1 - \alpha,\ \forall\theta \in \Theta$$

nazywamy **obszarem ufności** na **poziomie ufności** $1 - \alpha$.

Konstrukcja

Sposób pierwszy
W przestrzeni $\mathcal{X} \times \Theta$ wyznaczyć taki zbiór S, że dla każdego θ

$$P_\theta\{(\mathcal{X} \times \{\theta\}) \cap S\} = 1 - \alpha$$

Wówczas dla danego $x \in \mathcal{X}$ zbiór

$$(\{x\} \times \Theta) \cap S$$

jest zbiorem ufności na poziomie ufności $1 - \alpha$

Konstrukcja

Sposób drugi
Skonstruować taką funkcję $t(x, \theta)$, że przy wartości parametru θ jej rozkład nie zależy od θ oraz (jeżeli $\Theta \subset \mathbb{R}$) jest ona monotoniczną funkcją θ. Taka funkcja nazywa się **funkcją centralną**. Wówczas można wyznaczyć takie dwie liczby, że

$$P_\theta\{t_1 < t(x, \theta) < t_2\} = 1 - \alpha$$

Ze względu na monotoniczność funkcji centralnej

$$t_1 < t(x, \theta) < t_2 \Leftrightarrow \underline{\theta}(X) < \theta < \overline{\theta}(X)$$

Konstrukcja

Dodatkowe kryteria

- Symetryczny podział. Dla wszystkich $\theta \in \Theta$

$$P_\theta\{\theta < \underline{\theta}(X)\} = (1 - \alpha)/2 \text{ oraz } P_\theta\{\theta > \overline{\theta}(X)\} = (1 + \alpha)/2$$

- Jak najmniejszy zbiór ufności. Jeżeli $\Theta \subset \mathbb{R}$, to $\overline{\theta}(X) - \underline{\theta}(X) = \min!$

- Zbiór ufności o zadanej wielkości. Jeżeli $\Theta \subset \mathbb{R}$ oraz $d > 0$, to $\overline{\theta}(X) - \underline{\theta}(X) < d$

1.3 Model dwupunktowy

Przedział ufności - przykład

Model dwupunktowy: przedział ufności dla θ
Zaobserwowano $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.

Niech $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

Skonstruować przedział ufności $(\theta_1(X), \theta_2(X))$ dla θ na poziomie ufności $1 - \alpha$

$$P_\theta\{\theta_1(X) < \theta < \theta_2(X)\} = 0.95, \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

Przedział ufności - przykład

Model dwupunktowy: przedział ufności dla θ

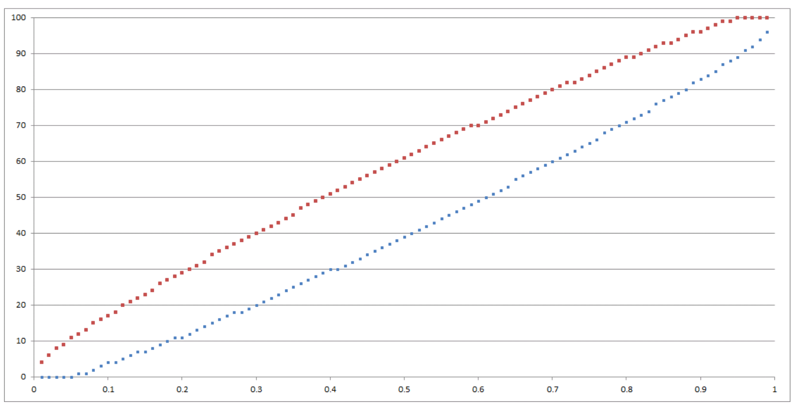
Dla każdego $\theta \in (0,1)$ znajdujemy takie dwie liczby $x_1(\theta)$ oraz $x_2(\theta)$, że

$$P_{n,\theta}\{x_1(\theta) \le X \le x_2(\theta)\} \ge 1-\alpha$$

$$X \sim Bin(n,\theta)$$

Przedział ufności - przykład

Model dwupunktowy: przedział ufności dla θ

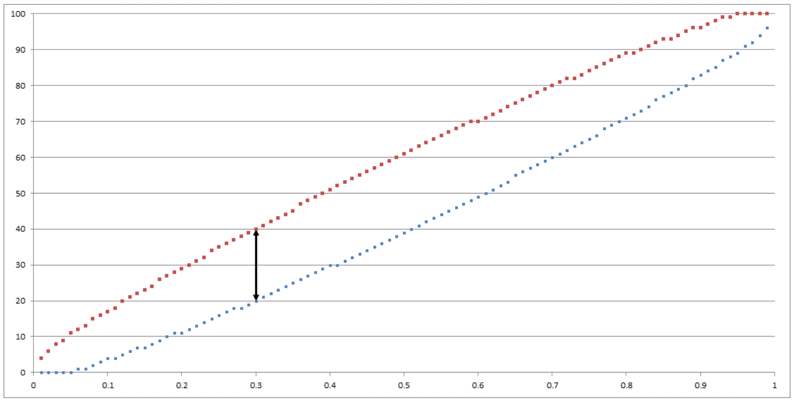


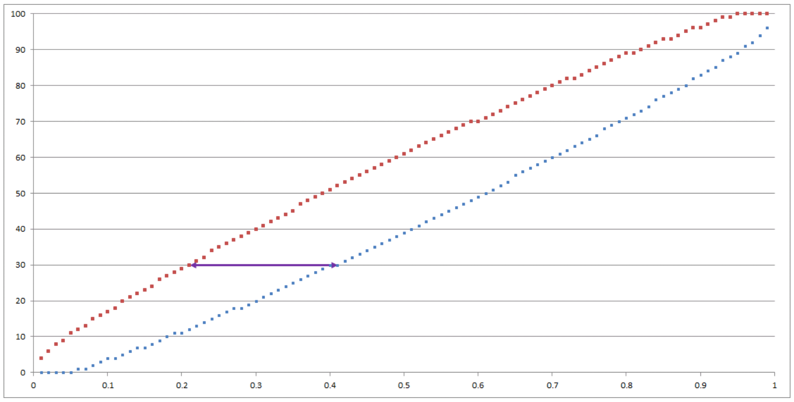
Przedział ufności - przykład

Model dwupunktowy: przedział ufności dla θ

Przedział ufności - przykład

Model dwupunktowy: przedział ufności dla θ





Przedział ufności - przykład

Model dwupunktowy: przedział ufności dla θ

Zaobserwowano $X = x$

Przedział ufności $(\theta_1(x), \theta_2(x))$

$$P_{\theta_1(x),n}\{X \le x\} \le \alpha_1$$
$$P_{\theta_2(x),n}\{X < x\} \le \alpha_2$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 \ge 1 - \alpha$$

Przedział ufności - przykład

Model dwupunktowy: przedział ufności dla θ

$$P_{\theta,n}\{X \le x\} = \beta(n-x, x+1; 1-\theta)$$

$$\theta_1(x) = \beta^{-1}\left(x+1, n-x; \alpha_1\right)$$

$$\theta_2(x) = \beta^{-1}\left(x, n-x+1; \alpha_2\right)$$

Przedział ufności - przykład

Model dwupunktowy: przedział ufności dla θ (klasyczny)

$$\alpha_1 = \frac{1+\alpha}{2},\ \alpha_2 = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\theta_1(x) = \beta^{-1}\left(x+1, n-x; \frac{1+\alpha}{2}\right)$$

$$\theta_2(x) = \beta^{-1}\left(x, n-x+1; \frac{1-\alpha}{2}\right)$$

1.4 Model gaussowski

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ

Model dla próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu\mathbf{1}_n, \sigma^2\boldsymbol{I}_n\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\right\}\right)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ

- $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$
- $\bar{X}$ oraz $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ są niezależne
- Jeżeli $\xi \sim N(0,1)$, $\eta \sim \chi^2_v$, ξ i η są niezależne, to $t = \xi/\sqrt{\eta/v} \sim t_v$.

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ
Funkcja centralna

$$t_{n-1} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$$

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ
Niech t_1, t_2 będą takimi liczbami, że

$$P\{t_1 < t_{n-1} < t_2\} = 1-\alpha$$

$$\left(\bar{X} - t_2\frac{S}{\sqrt{n}};\ \bar{X} - t_1\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ
Przedział jest najkrótszy, jeżeli $t_1 = -t_2$, czyli wybieramy taką liczbę $t(\alpha; n-1)$, że

$$P\{|t_{n-1}| < t(\alpha; n-1)\} = 1-\alpha$$

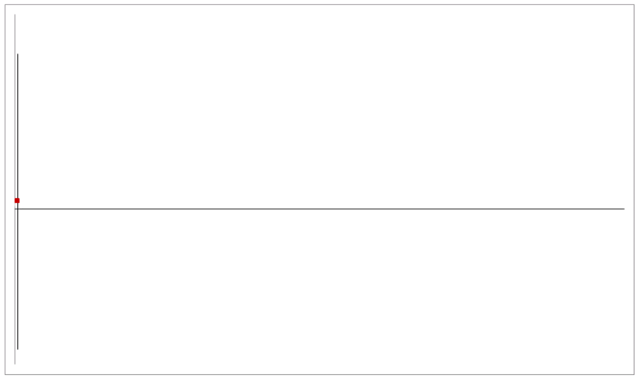
$$\left(\bar{X} - t(\alpha; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}};\ \bar{X} + t(\alpha; n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

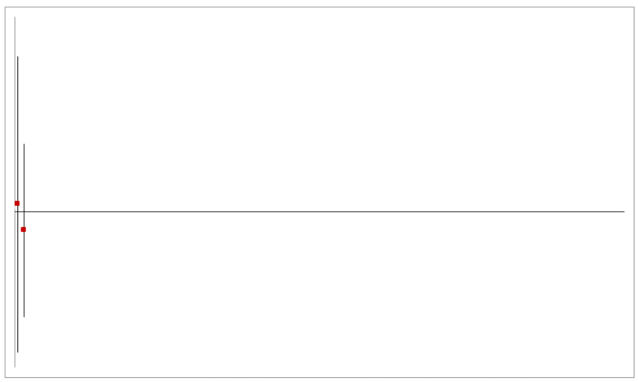
Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ





Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla μ

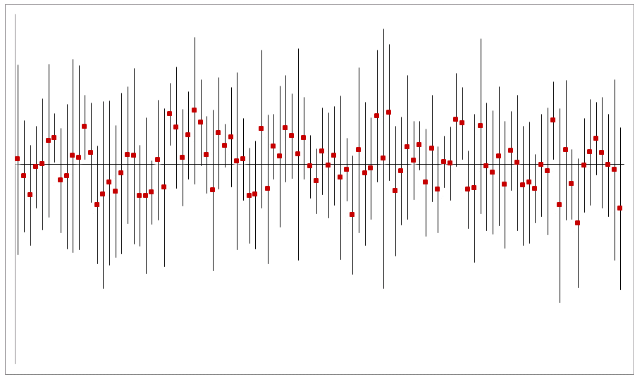
Przedział ufności - przykład

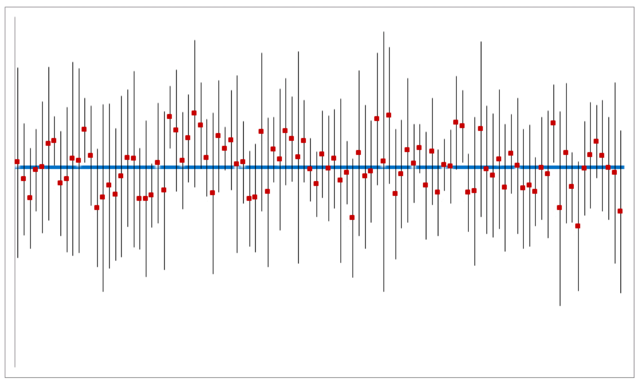
Model gaussowski: przedział ufności dla σ^2

Model dla próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu\mathbf{1}_n, \sigma^2\boldsymbol{I}_n\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$





Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla σ^2
Funkcja centralna

$$\chi^2_{n-1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla σ^2
Niech c_1, c_2 będą takimi liczbami, że

$$P\{c_1 < \chi^2_{n-1} < c_2\} = 1 - \alpha$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{c_2}; \ \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{c_1} \right)$$

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla σ^2 (klasyczny)

$$P\{\chi^2_{n-1} < c_1\} = \alpha/2 \text{ oraz } P\{\chi^2_{n-1} > c_2\} = \alpha/2$$

$$c_1 = \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right);\ c_2 = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right)$$

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla σ^2 (najkrótszy)

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} = \min!$$

$$\int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1 - \alpha$$

Rozwiązanie

$$\Lambda(c_1, c_2, \lambda) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} - \lambda\left(\int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx - (1-\alpha)\right)$$

$$\int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1 - \alpha$$

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla σ^2 (najkrótszy)

$$\begin{cases} \frac{\partial\Lambda(c_1,c_2,\lambda)}{\partial c_1} = -\frac{1}{c_1^2} + \lambda f_{n-1}(c_1) \\ \frac{\partial\Lambda(c_1,c_2,\lambda)}{\partial c_2} = \frac{1}{c_2^2} - \lambda f_{n-1}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1 - \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\Lambda(c_1,c_2,\lambda)}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial\Lambda(c_1,c_2,\lambda)}{\partial c_2} = 0 \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1 - \alpha \end{cases}$$

Przedział ufności - przykład

Model gaussowski: przedział ufności dla σ^2 (najkrótszy)
Rozwiązanie

$$c_2^2 f_{n-1}(c_2) = c_1^2 f_{n-1}(c_1)$$
$$\int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1 - \alpha$$

2 Weryfikacja hipotez statystycznych

2.1 Przykład wstępny

Testowanie hipotez - przykład wstępny

Pytanie
Producent twierdzi, że wadliwość produkcji wynosi 5%. My podejrzewamy, że rzeczywista wadliwość produkcji wynosi 15%.

Pobieramy próbę stuelementową i zliczamy liczbę X sztuk wadliwych. Model statystyczny

$$\{\{0, 1, \ldots, 100\}, \{Bin(100, \theta), \theta \in \Theta = \{0.05, 0.15\}\}\}$$

Testowanie hipotez - przykład wstępny

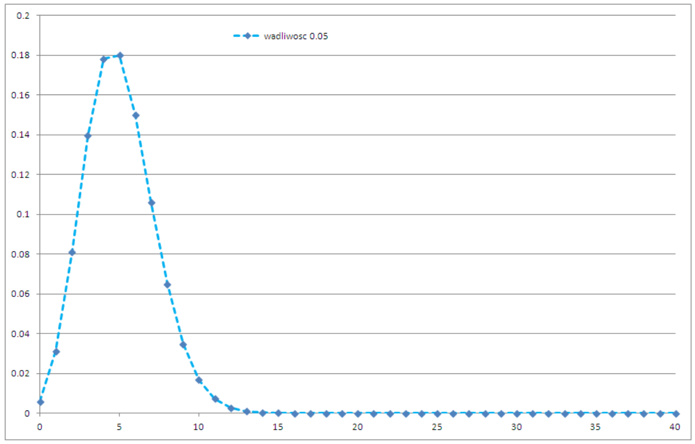
Rozumowanie

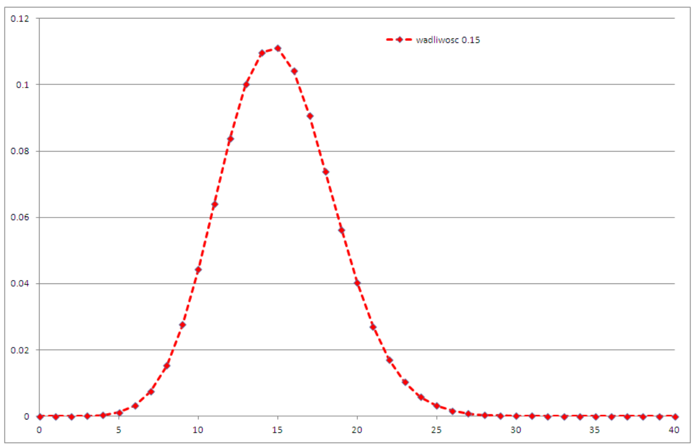
Testowanie hipotez - przykład wstępny

Rozumowanie

Testowanie hipotez - przykład wstępny

Rozumowanie





Testowanie hipotez - przykład wstępny

Rozumowanie

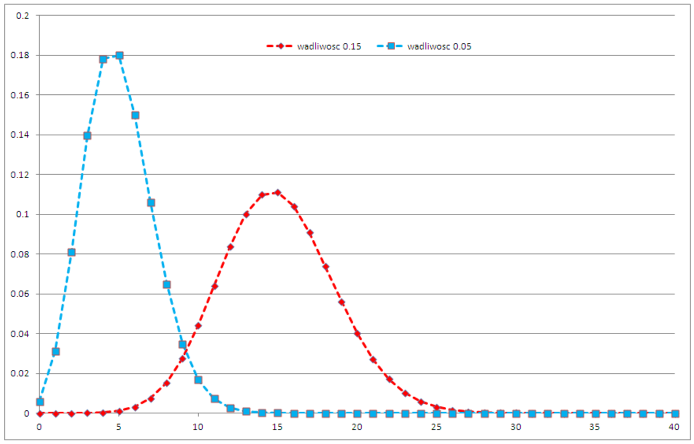
Testowanie hipotez - przykład wstępny

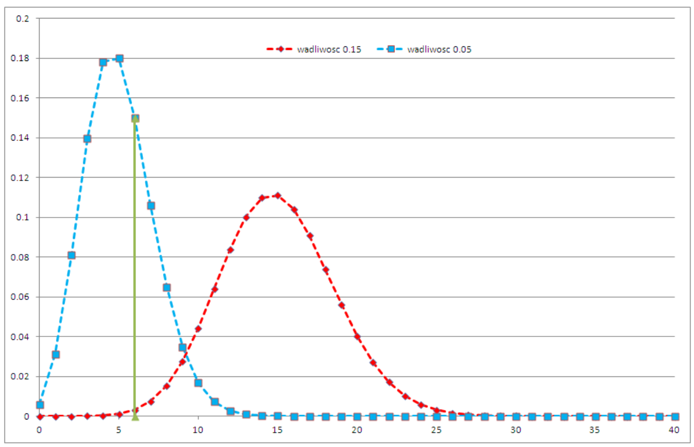
Rozumowanie

Testowanie hipotez - przykład wstępny

Test

Jeżeli $X \leq k$, to uznać $\theta = 0.05$





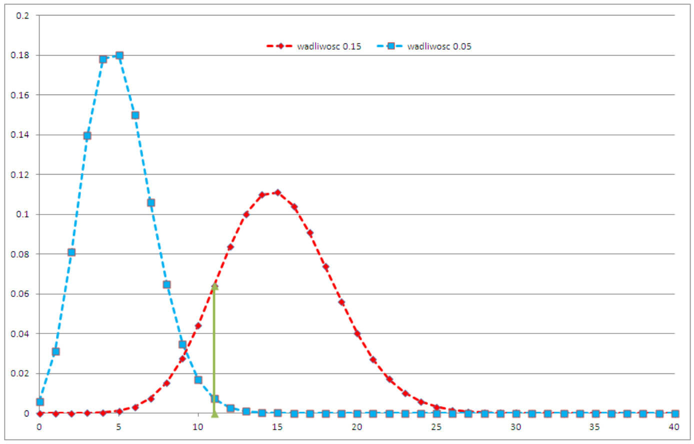
Jeżeli $X > k$, to uznać $\theta = 0.15$

Testowanie hipotez - przykład wstępny

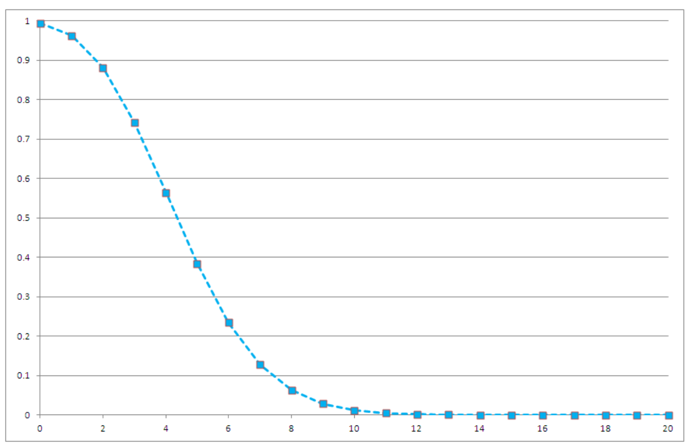
Błąd I rodzaju
Prawdziwe $\theta = 0.05$, a uznajemy, że $\theta = 0.15$.
Czyli zaobserwowano „dużo” wadliwych!

Błąd II rodzaju
Prawdziwe $\theta = 0.15$, a uznajemy, że $\theta = 0.05$.
Czyli zaobserwowano „mało” wadliwych!

Testowanie hipotez - przykład wstępny



$P_{0.05}\{X > k\}$

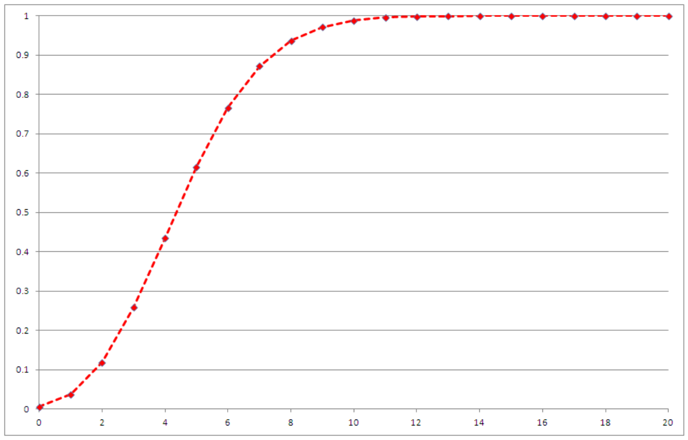


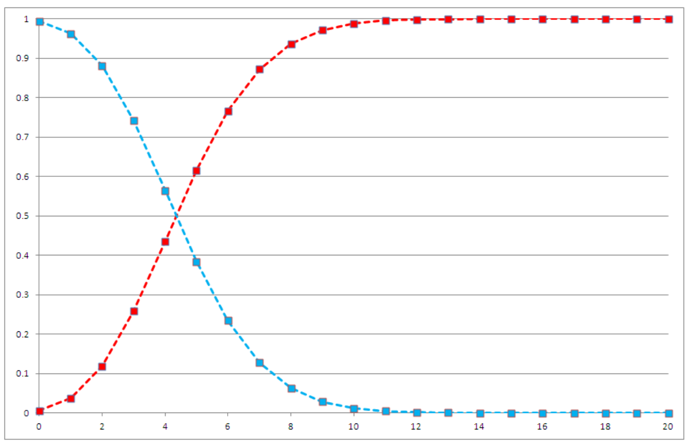
Testowanie hipotez - przykład wstępny

$P_{0.15}\{X \leq k\}$

Testowanie hipotez - przykład wstępny

$P_{0.05}\{X > k\}$ **oraz** $P_{0.15}\{X \leq k\}$





Testowanie hipotez - przykład wstępny

$P_{0.05}\{X > k\}$ $\alpha = 0.05$

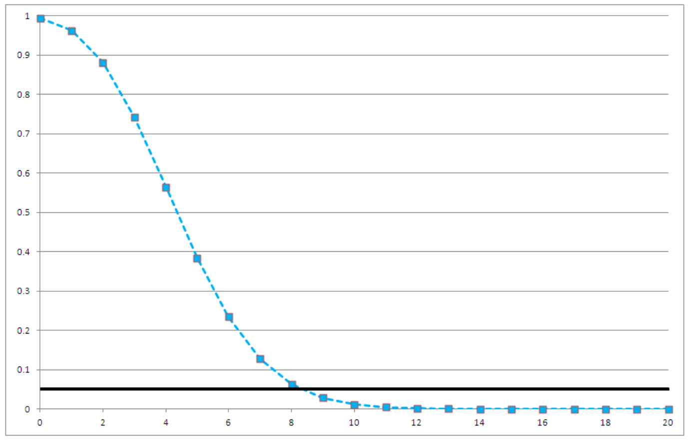
2.2 Określenia

Pojęcia

Model statystyczny

$$(\mathcal{X}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

Hipoteza statystyczna
Podzbiór Θ_0 zbioru Θ.



Θ_0 nazywamy **hipotezą zerową**
$\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ nazywamy **hipotezą alternatywną**

Pojęcia

Hipoteza prosta
Zbiór Θ_0 jest jednoelementowy

Hipoteza złożona
Zbiór Θ_0 ma więcej niż jeden element

Zapis klasyczny

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Pojęcia

Test statystyczny
Procedura statystyczna, w wyniku której podejmujemy jedną z dwóch decyzji:
odrzucić hipotezę zerową H_0
lub
nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej H_0.

Pojęcia

Test statystyczny

Test hipotezy H_0 utożsamiamy z funkcją $\phi : \mathcal{X} \to \{0, 1\}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{odrzucić } H_0 \\ 0 & \text{nie odrzucać } H_0 \end{cases}$$

Obszar krytyczny

$$\{x \in \mathcal{X} : \phi(x) = 1\}$$

Pojęcia

Zrandomizowany test statystyczny
Funkcja $\phi : \mathcal{X} \to [0, 1]$

$$\phi(x) \begin{cases} = 1 & \text{odrzucić } H_0 \\ \in (0,1) & \text{na podstawie niezależnego od } X \text{ mechanizmu losowego odrzucić } H_0 \text{ z prawdopodobieństwem } \phi(x) \\ = 0 & \text{nie odrzucać } H_0 \end{cases}$$

Pojęcia

Błąd I rodzaju
Błąd polegający na odrzuceniu hipotezy zerowej H_0, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa.

Poziom istotności
Niech $\alpha \in (0, 1)$. Test ϕ jest na poziomie istotności α, jeżeli

$$E_\theta \phi(X) = P_\theta\{\phi(X) = 1\} \leq \alpha, \ \forall \theta \in \Theta_0$$

Rozmiar testu

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \phi(X) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta\{\phi(X) = 1\}$$

Pojęcia

Błąd II rodzaju
Błąd polegający na nieodrzuceniu hipotezy zerowej H_0, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa

Moc testu

$$\Theta_1 \in \theta \to E_\theta \phi(X) = P_\theta\{\phi(X) = 1\}$$

3 Hipotezy proste

3.1 Lemat Neymana–Pearsona

Lemat Neymana–Pearsona

Założenia
Niech P_{θ_0} oraz P_{θ_1} będą rozkładami prawdopodobieństwa o gęstościach f_0 i f_1. Niech $\alpha \in (0, 1)$ będzie ustaloną liczbą

Lemat Neymana–Pearsona

Istnienie testu
Istnieją takie stałe t i γ, że

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } f_1(x) > t f_0(x) \\ \gamma, & \text{gdy } f_1(x) = t f_0(x) \\ 0, & \text{gdy } f_1(x) < t f_0(x) \end{cases}$$

jest testem hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$ przeciwko $H_1 : \theta = \theta_1$ na poziomie istotności α, tzn.

$$(*) \qquad E_{\theta_0} \phi(X) = \alpha$$

Lemat Neymana–Pearsona

Dostateczność
Jeżeli test ϕ spełnia warunek $(*)$ i dla pewnego t warunek

$$(**) \qquad \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } f_1(x) > t f_0(x) \\ 0, & \text{gdy } f_1(x) < t f_0(x) \end{cases}$$

to ϕ jest testem najmocniejszym na poziomie istotności α

Konieczność
Jeżeli ϕ jest testem najmocniejszym na poziomie istotności α, to spełnia on warunek $(**)$

3.2 Model dwupunktowy

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Niech $\theta_0 < \theta_1 \in (0, 1)$. Model statystyczny

$$\{\{0, 1, \ldots, n\}, \{B(n, \theta), \theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}\}\}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta = \theta_1$$

$$f_0(x) = \binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}$$
$$f_1(x) = \binom{n}{x}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n-x}$$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Konstrukcja testu $\phi(x)$

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > t \Leftrightarrow \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^x > t\left[\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right]^n$$

Obszar krytyczny: $\{x > k\}$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Obszar krytyczny: $\{x > k\}$
Stała k dobrana jest tak, że

$$E_{\theta_0}\phi(X) = P_{\theta_0}\{X > k\} \leq \alpha$$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Niech $n = 100$, $\theta_0 = 0.05$, $\theta_1 = 0.15$, $\alpha = 0.05$

k	8	9	10	11
$P_{0.05}\{x > k\}$	0.06309	0.02819	0.01147	0.00427

Test niezrandomizowany

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 9, \\ 0, & \text{jeżeli } x \leq 9. \end{cases}$$

Rozmiar testu: $P_{0.05}\{x > 9\} = 0.02819$
Błąd II rodzaju: $P_{0.15}\{x \leq 9\} = 0.05509$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Niech $n = 100$, $\theta_0 = 0.05$, $\theta_1 = 0.15$, $\alpha = 0.05$

k	8	9	10	11
$P_{0.05}\{x > k\}$	0.06309	0.02819	0.01147	0.00427
$P_{0.05}\{x = k\}$	0.06487	0.03490	0.01672	0.00720

Test zrandomizowany

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 9 \\ 0.62495, & \text{jeżeli } x = 9 \\ 0, & \text{jeżeli } x < 9 \end{cases}$$

Hipotezy proste - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta = \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta = \theta_1$
Rozmiar testu zrandomizowanego

$$\begin{aligned} &P_{0.05}\{x > 9\} + 0.62495 \cdot P_{0.05}\{x = 9\} \\ &\qquad = 0.02819 + 0.62495 \cdot 0.03490 = 0.05 \end{aligned}$$

3.3 Jednostajny vs Beta

Hipotezy proste - przykład

$H_0 : U(0,1)$ **vs** $H_1 : B(a,b)$
Niech $a, b > 1$. Model statystyczny

$$\{(0,1), \{U(0,1), B(a,b)\}\}$$

$$H_0 : U(0,1) \text{ vs } H_1 : B(a,b)$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(x) \\ f_1(x) &\propto x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x) \end{aligned}$$

Hipotezy proste - przykład

$H_0 : U(0,1)$ **vs** $H_1 : B(a,b)$

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > t \Leftrightarrow x^{a-1}(1-x)^{b-1} > t$$

Obszar krytyczny: $\{x_0 < x < x_1\}$

Liczby x_0, x_1 dobrane są tak, że

$$E_{\theta_0}\phi(X) = P_{U(0,1)}\{x_0 < X < x_1\} \leq \alpha$$

Hipotezy proste - przykład

$H_0 : U(0,1)$ **vs** $H_1 : B(a,b)$

$$x_0^{a-1}(1-x_0)^{b-1} = x_1^{a-1}(1-x_1)^{b-1}$$

Ponieważ $x_1 = x_0 + \alpha$, więc

$$\left[\frac{x_0 + \alpha}{x_0}\right]^{a-1} \left[\frac{1 - x_0 - \alpha}{1 - x_0}\right]^{b-1} = 1$$

Hipotezy proste - przykład

$H_0 : U(0,1)$ **vs** $H_1 : B(a,b)$

a	b	x_0	x_1
2	2	0.47500	0.52500
2	3	0.30865	0.35865
2	4	0.22556	0.27556
3	2	0.64135	0.69135
3	3	0.47500	0.52500
3	4	0.37517	0.42517
4	2	0.72444	0.77444
4	3	0.57483	0.62483
4	4	0.47500	0.52500

4 Hipotezy złożone

4.1 Iloraz wiarogodności

Hipotezy złożone

Problem

$$(\mathcal{X}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

H_0 i/lub H_1 złożone

Hipotezy złożone

Iloraz wiarogodności (1)

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_1} f_\theta(x)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x)}$$

Iloraz wiarogodności (2)

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} f_\theta(x)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x)}$$

Hipotezy złożone

Test

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \lambda(x) > t \\ \gamma, & \text{gdy } \lambda(x) = t \\ 0, & \text{gdy } \lambda(x) < t \end{cases}$$

Dobór stałej t

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \phi(X) \leq \alpha$$

4.2 Model dwupunktowy

Hipotezy złożone - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$
Niech $\theta_0 \in (0,1)$. Model statystyczny

$$\{\{0, 1, \ldots, n\}, \{B(n, \theta), \theta \in \Theta = (0,1)\}\}$$

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta > \theta_0$$

$$f_\theta(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Dla danego x

$$\sup_{\theta \in (0,1)} f_\theta(x) = f_{\frac{x}{n}}(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \leq \theta_0, \\ \binom{n}{x} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0, \end{cases}$$

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f_\theta(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta_0^x (1-\theta_0)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \leq \theta_0, \\ \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0. \end{cases}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta \le \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_1} f_\theta(x)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x)} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}}{\binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \le \theta_0, \\ \dfrac{\binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}}{\binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0. \end{cases}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model dwupunktowy: $H_0 : \theta \le \theta_0$ **vs** $H_1 : \theta > \theta_0$
$\lambda(x)$ jest rosnąca ze względu na x

$$\lambda(x) > t \Leftrightarrow x > k$$

Dobór stałej k

$$\sup_{\theta \le \theta_0} P_\theta\{X > k\} = P_{\theta_0}\{X > k\} \le \alpha$$

4.3 Model gaussowski

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \ne \mu_0$
Niech $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Model dla próby $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu\mathbf{1}_n, \sigma^2\boldsymbol{I}_n\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

$$\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad \Theta_0 = \{\mu_0\} \times \mathbb{R}_+ \quad \Theta_1 = (\mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}) \times \mathbb{R}_+$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu \ne \mu_0$$

$$f_{\mu,\sigma}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} f_{\mu,\sigma}(x) = f_{\mu_0,\tilde{\sigma}}(x) = \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$$

$$\sup_{\theta\in\Theta} f_{\mu,\sigma}(x) = f_{\bar{x},\hat{\sigma}}(x) = \left(\frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Iloraz wiarogodności

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} f_{\mu,\sigma}(x)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} f_{\mu,\sigma}(x)} = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}}\right)^n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2$$

$$\lambda(x) = \left(1 + \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \lambda(x) > t \Leftrightarrow \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} > t'$$

Dobór stałej t'

$$E_{H_0}\phi(X) = \alpha$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- jeżeli H_0 jest prawdziwa, to

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{czyli} \quad \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$$

- dla wszystkich $\theta \in \Theta$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

- $\bar{X}$ oraz $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$ są niezależne

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Jeżeli hipoteza H_0 jest prawdziwa, to

$$\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \sim F_{1,n-1}$$

Hipotezy złożone - przykład

Model gaussowski: $H_0 : \mu = \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu \neq \mu_0$
H_0 jest odrzucana na poziomie istotności α, jeżeli

$$(*) \qquad \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} > F_{1,n-1}^{\alpha}$$

Ponieważ $t_v = \sqrt{F_{1,v}}$, więc $(*)$ jest równoważne

$$(\clubsuit) \qquad \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S} \sqrt{n} > t_{n-1}^{\alpha}$$

Test ($\clubsuit$) nazywa się **testem Studenta**

4.4 Moc testu

Moc testu

Określenie

$$\Theta_1 \ni \theta \to E_\theta \phi(X) = P_\theta\{\phi(X) = 1\}$$

Moc testu - przykład

Model gaussowski (σ^2 znana): $H_0 : \mu \leq \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu > \mu_0$
Niech $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu\mathbf{1}_n, \sigma^2\boldsymbol{I}_n\right),\ \theta = \mu \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

$$\Theta = \mathbb{R} \quad \Theta_0 = (-\infty, \mu_0\rangle \quad \Theta_1 = (\mu_0, \infty)$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu > \mu_0$$

Obszar krytyczny testu

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha}$$

Moc testu - przykład

Model gaussowski (σ^2 znana): $H_0 : \mu \leq \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu > \mu_0$
Niech $\mu > \mu_0$. Prawdopodobieństwo odrzucenia H_0

$$\begin{aligned}
&P_\mu\left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha}\right\} = \\
&P_\mu\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right\} = \\
&1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)
\end{aligned}$$

Moc testu jest zależna od $(\mu - \mu_0)/\sigma$

4.5 Liczność próby

Liczność próby

Model gaussowski (σ^2 znana): $H_0 : \mu \leq \mu_0$ **vs** $H_1 : \mu > \mu_0$
Niech $(\mu - \mu_0)/\sigma = x_0$ będzie daną liczbą. Powiedzmy, że interesuje nas osiągnięcie dla tej wartości mocy co najmniej γ. Szukamy takiego n, że

$$1 - \Phi(u_{1-\alpha} - x_0\sqrt{n}) \geq \gamma$$

Rozwiązanie:

$$u_{1-\alpha} - x_0\sqrt{n} \leq u_{1-\gamma}$$

Stąd

$$n \geq \left[\frac{u_{1-\alpha} - u_{1-\gamma}}{x_0}\right]^2$$

minimalne n

x_0	0.6	0.7	0.8	0.85	0.9	0.95
0.01	48987	61720	78488	89783	105073	129946
0.1	489	617	784	897	1050	1299
0.2	122	154	196	224	262	324
0.3	54	68	87	99	116	144
0.4	30	38	49	56	65	81
0.5	19	24	31	35	42	51
0.6	13	17	21	24	29	36
0.7	9	12	16	18	21	26
0.8	7	9	12	14	16	20
0.9	6	7	9	11	12	16
1	4	6	7	8	10	12