1. Pewien Student nie zna odpowiedzi na niektóre z pytań na kartkach egzaminacyjnych. W jakim przypadku szansa wyciągnięcia przez niego kartki z pytaniem, na które nie zna odpowiedzi będzie najmniejsza: jeżeli losuje pierwszy, czy jeżeli losuje ostatni.

2. Prawdopodobieństwo, że wyroby pewnej fabryki spełniają wymagane normy wynosi 0.96. Zakładamy uproszczony system sprawdzania, który daje rezultat dodatni z prawdopodobieństwem 0.98 dla sztuk dobrych i z prawdopodobieństwem 0.05 dla sztuk wadliwych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sztuka uznana za dobrą przez kontrolę rzeczywiście spełnia wymagania normy?

3. Załóżmy, że prawdopodobieństwo trafienia w cel przy pojedynczym strzale wynosi p, a prawdopodobieństwo zniszczenia celu przy $k \geq 1$ trafieniach wynosi $1 - q^k$. Jakie jest prawdopodobieństwo zniszczenia celu, jeżeli oddano n strzałów.

4. W partii towaru złożonej z N sztuk znajduje się $M < N$ wadliwych. Wybrano losowo $n < N$ sztuk, które poddano pobieżnej kontroli. Kontrola ta może popełnić błędy: z prawdopodobieństwem p może się zdarzyć, że wadliwą sztukę uzna się za „dobrą", a z prawdopodobieństwem q dobrą sztukę uzna się za „wadliwą". Obliczyć prawdopodobieństwo, że m sztuk zostanie uznanych za wadliwe.

5. Przypuśćmy, że pewien owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k} e^{-\lambda}$, a każde z jajeczek wylęga się z prawdopodobieństwem p. Zakładając wzajemną niezależność wylęgania się jaj znaleźć prawdopodobieństwo, że ilość potomków danego owada wyniesie dokładnie l.

6. Z urny zawierającej $m \geq 3$ kul białych i n kul czarnych zgubiono jedną kulę nieznanego koloru. Aby określić skład urny wybrano z niej losowo trzy kule. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zgubiona kula była biała, jeżeli wiadomo, że wszystkie wybrane kule są białe.

7. Dwaj gracze A i B posiadający początkowo kapitały odpowiednio a i b grają w grę hazardową składającą się z oddzielnych partii. W każdej z partii pierwszy z graczy wygrywa z prawdopodobieństwem 0.5 i przegrywa z prawdopodobieństwem 0.5. Wypłata odbywa się po każdej partii i wynosi 1, przy czym gra toczy się tak długo, aż jeden z graczy nie zostanie zruinowany. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny drugiego gracza. Rozwiązać to zadanie w przypadku, gdy pierwszy gracz wygrywa z prawdopodobieństwem $p > 0.5$ i przegrywa z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.

8. Znaleźć liczbę β o tej własności, żeby przy rzucaniu kostką do gry prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wyrzuceniu serii trzech kolejnych jedynek przed serią β kolejnych nie–jedynek było w przybliżeniu równe 0.5. (Wskazówka. Wprowadzić prawdopodobieństwa warunkowe u i v zdarzenia A przy warunku, że wynikiem pierwszego rzutu były odpowiednio jedynka i nie–jedynka. Używając wzoru na prawdopodobieństwo całkowite ułożyć równanie wiążące u i v.)

9. Rozpatrzmy ciąg niezależnych doświadczeń, z których każde może dać trzy możliwe wyniki A, B, C z odpowiednimi prawdopodobieństwami p, q r $(p + q + r = 1)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
a. seria wyników A o długości α pojawi się wcześniej niż seria wyników B o długości β;
b. seria wyników A o długości α pojawi się wcześniej niż seria wyników B o długości β lub seria wyników C o długości γ.

10. Dwóch ludzi rzuca kolejno monetą. Wygrywa ten, kto pierwszy wyrzuci orła, Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych. Obliczyć prawdopodobieństwo p_k, że gra skończy się przy k–tym rzucie. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję ilości rzutów moneta.

11. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym $EX = 2,\ D^2X = 1,\ EY = 1,\ D^2Y = 4$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję
a. $Z_1 = X - 2Y$;
b. $Z_2 = 2X - Y$.

12. Załóżmy, że jeziorze jest 15000 ryb, z których 1000 było zaobrączkowanych. Wyłowiono z jeziora 100 ryb. Znaleźć wartość oczekiwaną ilości ryb znaczonych wśród połowu.

13. Właściciel miesięcznego biletu kolejowego wychodzi zazwyczaj z domu między godziną 7^{30} a 8^{00} rano; dojście do stacji zajmuje mu od 20 do 30 minut. Zakładamy, że moment wyjścia z domu i czas zużyty na dojście do stacji są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie jednostajnym w odpowiednich przedziałach. Sa dwa pociągi, którymi może on dojechać do pracy: jeden o 8^{05}, który jedzie 35 minut, i drugi o 8^{25}, który jedzie 30 minut. Zakładając, że pojedzie on jednym z tych pociągów, wyznaczyć wartość oczekiwaną czasu jego przyjazdu na stację przeznaczenia. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spóźni się na oba pociągi?

14. Kontrola techniczna bada pewne elementy, z których każdy niezależnie od innych może być wadliwy z prawdopodobieństwem p. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję ilości sztuk wadliwych wśród n kontrolowanych. Znaleźć wartość oczekiwaną ilości sztuk dobrych pomiędzy dwoma kolejnymi sztukami wadliwymi.

15. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X i Y przyjmujących wartości całkowite dany jest za pomocą tablicy

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$Y=0$	0.01	0.05	0.12	0.02	0.00	0.01
$Y=1$	0.02	0.00	0.01	0.05	0.02	0.02
$Y=2$	0.00	0.05	0.10	0.00	0.30	0.05
$Y=3$	0.01	0.00	0.02	0.01	0.03	0.10

Obliczyć

$$P\{X=2|Y=3\},\ E(X|Y=1),\ E(X+Y),\ E(X^2|Y\le 1),\ P\{X+Y\le 5|Y\le 2\},\ E(XY|Y\le 1).$$

16. Wielka ilość N ludzi podlega badaniom krwi. Badanie to można przeprowadzić dwoma sposobami.
1. Krew każdego osobnika bada się oddzielnie; w tym przypadku potrzeba N analiz;
2. Krew k osobników miesza się razem i analizuje się otrzymaną mieszaninę. Jeżeli wynik tej analizy jest ujemny, to wystarcza ona dla k ludzi. Jeżeli wynik jest dodatni, to bada się oddzielnie tych k ludzi; w tym przypadku potrzeba $k+1$ analiz. Zakładamy, że prawdopodobieństwo dodatniego wyniku analizy jest takie samo dla wszystkich osobników i że wyniki analiz są wzajemnie niezależne w sensie probabilistycznym.
a. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wynik analizy mieszanki krwi k osobników będzie dodatni.
b. Obliczyć wartość oczekiwaną ilości X analiz dla drugiej metody.
c. Dla jakiej wartości k wartość oczekiwana ilości niezbędnych analiz osiąga minimum?

17. Niech X i Y będą niezależne, przy czym

$$P\{X=0\}=P\{X=1\}=0.5 \quad \text{oraz} \quad P\{Y<x\}=x\ (0<x<1).$$

Znaleźć rozkłady zmiennych losowych
a. $Z_1 = Y + X$;
b. $Z_2 = Y + \frac{1}{2}X$;
c. $Z_3 = YX$.

18. Znaleźć rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych X i Y takich, że X ma rozkład jednostajny w przedziale $(-h,h)$, a Y ma dystrybuantę $F(y)$.

19. Niech zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $p_X(x)$. Znaleźć funkcję gęstości zmiennych losowych
a. $Y = aX + b$, gdzie a i b są rzeczywiste;
b. $Y = X^{-1}$;
c. $Y = \cos X$;
d. $Y = f(X)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i monotoniczną.

20. Udowodnić, że dla dowolnej zmiennej losowej X o ciągłej dystrybuancie $F(x)$ dla $0 \le x \le 1$ mamy $P\{F(X) < x\} = x$.

21. Zmienna losowa skokowa X ma *rozkład Poissona*

$$P\{X=m\} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \qquad (m=0,1,2,\ldots).$$

Niech M oznacza średnią arytmetyczną z N niezależnych realizacji zmiennej X.
a. Znaleźć średnią i wariancję zmiennej M.
b. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej M.
c. Narysować wykres dla wyników punktu b tego zadania przy $\lambda = 1$ i $N = 3$, i $N = 10$.

22. Niech $p_X(x)$, $p_Y(y)$, $p_{X+Y}(z)$ będą gęstościami zmiennych losowych zmiennych losowych X, Y, $X+Y$. Udowodnić, że jeżeli X i Y są niezależne, to

$$p_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(z-y)p_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx.$$

23. Gęstość niezależnych zmiennych losowych X i Y równa się

a. $p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ae^{-ax}, & x > 0; \end{cases}$

b. $p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, x \ge a, \\ \frac{1}{a}, & 0 < x < a; \end{cases}$

c. $p_X(x) = p_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$.

Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Z = X/Y$.

24. Znaleźć rozkład iloczynu niezależnych czynników X i Y mając dane ich dystrybuanty $F_1(x)$ i $F_2(y)$.

25. Na odcinek $[0,1]$ rzucono n punktów. Zakładając, że punkty zostały rzucone losowo (tzn. położenie każdego z nich ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$ i są one wzajemnie niezależne) znaleźć

a. gęstość rozkładu $Z_1 = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$;

b. gęstość rozkładu k–tego punktu od lewej strony;

c. łączny rozkład położenia k–tego i m–tego punktu licząc od lewej strony ($k < m$);

d. gęstość rozkładu $Z_2 = \max_i X_i - \min_i X_i$.

26. Dwuwymiarowy rozkład normalny. Dwuwymiarowy rozkład zmiennych losowych X i Y opisany jest funkcją gęstości

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

dla wszystkich $(x,y) \in R^2$, $\mu_1, \mu_2 \in R$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\varrho \in [-1,1]$.

a. Znaleźć rozkład brzegowy zmiennej losowej X oraz rozkład warunkowy X pod warunkiem $Y = y$.

b. Znaleźć rozkład brzegowy zmiennej losowej Y oraz rozkład warunkowy Y pod warunkiem $X = x$.

c. Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

d. Wyznaczyć EX, EY, D^2X, D^2Y, $Cov(X,Y)$ oraz współczynnik korelacji.

e. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych $X+Y$, $X-Y$, X^2, X^2+Y^2.

f. Wyznaczyć $E(X+Y)$, $E(X-Y)$, $E(X^2)$, $E(X^2+Y^2)$, $D^2(X+Y)$, $D^2(X-Y)$, $D^2(X^2)$, $D^2(X^2+Y^2)$.

g. Wyznaczyć $E(X|Y)$, $E(Y|X)$, $D^2(X|Y)$, $D^2(Y|X)$.

27. Wielowymiarowy rozkład normalny $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Wektor losowy $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]'$ ma n–wymiarowy rozkład normalny, jeżeli jego funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right].$$

Udowodnić, że

$$E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}, \quad D^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Sigma}$$

Udowodnić, że

a. Jeżeli $\boldsymbol{x} \sim N_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{A}$ – $p \times n$ macierz stałych, to $\boldsymbol{Ax} \sim N_p(\boldsymbol{A\mu}, \boldsymbol{A\Sigma A'})$.

b. Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o tej samej wariancji oraz $\boldsymbol{T}$ jest macierzą ortogonalną, to elementy wektora losowego $\boldsymbol{Tx}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych.

c. Jeżeli $\boldsymbol{x}$ ma n–wymiarowy rozkład normalny, to każda składowa ma jednowymiarowy rozkład normalny (twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.)

d. Wektor $\boldsymbol{x}$ ma wielowymiarowy rozkład normalny wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall\ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$ $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ ma jednowymiarowy rozkład normalny.

e. Niech $\boldsymbol{x} \sim N_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$. Zmienne losowe $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}$ oraz $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{x}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = 0$.