

***Przykład 0.***

Gra polega na jednokrotnym rzucie **symetryczną** monetą, przy czym wygrywamy 1 jeżeli wypadnie orzeł oraz przegrywamy 1 jeżeli wypadnie reszka. Nasz początkowy kapitał wynosi 5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu pięciu gier podwoimy nasz kapitał?

Zmienna losowa (*wygrana w pojedynczej grze*):

$$(1, 0.5), (-1, 0.5)$$

Podwojenie kapitału początkowego w ciągu pięciu gier jest równoważne wyrzuceniu kolejno pięciu orłów. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi

$$(0.5)^5$$

.....

**Przykład 0.** (cd.)

Gra polega na jednokrotnym rzucie monetą, przy czym wygrywamy 1 jeżeli wypadnie orzeł oraz przegrywamy 1 jeżeli wypadnie reszka. Nasz początkowy kapitał wynosi 5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu pięciu gier podwoimy nasz kapitał?

**UWAGA:**

**nie znamy prawdopodobieństwa wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie!**

Zmienna losowa (*wygrana w pojedynczej grze*):

$$(1, \theta), (-1, 1 - \theta) \quad (\theta \in [0, 1])$$

Podwojenie kapitału początkowego w ciągu pięciu gier jest równoważne wyrzuceniu kolejno pięciu orłów. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi

$$P_\theta = \theta^5$$

.....

# Model statystyczny

Model probabilistyczny:

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$$

Model statystyczny:

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$$

**Przykład 1.** (*Model probabilistyczny*)

Rzucamy  $n$ -krotnie **symetryczną** monetą.

Zmienna losowa  $\xi$ : ilość orłów.

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}, \theta = 0.5, P_\theta = B(n, 0.5)$$

$$(\{0, 1, \dots, n\}, B(n, 0.5))$$

(*Model statystyczny*)

Rzucamy  $n$ -krotnie **jakąś** monetą.

Zmienna losowa  $\xi$ : ilość orłów.

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}, \Theta = [0, 1], P_\theta = B(n, \theta)$$

$$(\{0, 1, \dots, n\}, \{B(n, \theta), \theta \in [0, 1]\})$$

.....

**Przykład 2.** (*Model probabilistyczny*)

Wiadomo, że w pewnym gatunku owadów jest 40% osobników męskich. Owady chwytamy do momentu uzyskania ustalonej liczby  $k$  osobników męskich. Zmienna losowa  $\xi$ : ogólna liczba schwytanych owadów.

$$\mathcal{X} = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}, \theta = 0.4, P_\theta = NB(n, 0.4)$$

$$(\{k, k + 1, k + 2, \dots\}, NB(n, 0.4))$$

(*Model statystyczny*)

Wiadomo, że w pewnym gatunku owadów jest **pe-wien** odsetek osobników męskich. Owady chwytamy do momentu uzyskania ustalonej liczby  $k$  osobników męskich.

Zmienna losowa  $\xi$ : ogólna liczba schwytanych owadów.

$$\mathcal{X} = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}, \Theta = [0, 1], P_\theta = NB(n, \theta)$$

$$(\{k, k + 1, k + 2, \dots\}, \{NB(n, \theta), \theta \in [0, 1]\})$$

.....

**Przykład 3.** (*Model probabilistyczny*)

Z grupy  $N$  osób wśród których jest **znana** liczba  $M$  kobiet losujemy  $n$  osób.

Zmienna losowa  $\xi$ : liczba wylosowanych kobiet.

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}, \quad \theta = M, \quad P_\theta = H(N, n, M)$$

$$(\{0, 1, \dots, M\}, H(N, n, M))$$

(*Model statystyczny*)

Z grupy  $N$  osób wśród których jest **nieznana** liczba  $M$  kobiet losujemy  $n$  osób.

Zmienna losowa  $\xi$ : liczba wylosowanych kobiet.

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}, \quad \theta = M,$$

$$\Theta = \{0, 1, \dots, N\}, \quad P_\theta = H(N, n, M)$$

$$(\{0, 1, \dots, M\}, \{H(N, n, M), M \in \{0, 1, \dots, N\}\})$$

.....

**Przykład 4.** (*Model probabilistyczny*)

Dokonujemy pomiarów przyrządem o którym **wiadomo**, że nie popełnia błędu systematycznego oraz **znana** jest jego precyzja.

Zmienna losowa  $\xi$ : błąd pomiaru.

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}, \quad \theta = (\mu = 0, \sigma^2), \quad P_\theta = N(\mu = 0, \sigma^2)$$

$$(\mathbb{R}, N(\mu = 0, \sigma^2))$$

(*Model statystyczny*)

Dokonujemy pomiarów przyrządem o którym **nie wiadomo** czy nie popełnia błędu systematycznego oraz **nieznana** jest jego precyzja. Zmienna losowa  $\xi$ : błąd pomiaru.

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}, \quad \theta = (\mu, \sigma^2),$$

$$\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad P_\theta = N(\mu, \sigma^2)$$

$$(\mathbb{R}, \{N(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\})$$

.....

# Podstawowe problemy

Model statystyczny:

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$$

**Pytanie 1.** Ile wynosi  $\theta$ ? (estymacja)

**Pytanie 2.** W zbiorze  $\Theta$  wyróżniony jest podzbiór  $\Theta_0$ . Czy  $\theta \in \Theta_0$ ? (weryfikacja hipotez statystycznych)

**Przykład 1.** Rzucamy  $n$ -krotnie **jakaś** monetą. Zmienna losowa  $\xi$ : ilość orłów.

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}, \quad \Theta = [0, 1], \quad P_\theta = B(n, \theta)$$

$$(\{0, 1, \dots, n\}, \{B(n, \theta), \theta \in [0, 1]\})$$

**Pytanie 1.**

Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła?

**Pytanie 2.**

Czy moneta jest symetryczna? ( $\theta \in \Theta_0 = \{1/2\}$ )

.....

**Przykład 2.** Wiadomo, że w pewnym gatunku owadów jest **pewien** odsetek osobników męskich. Owa-  
dy chwytały do momentu uzyskania ustalonej liczby  
 $k$  osobników męskich.

Zmienna losowa  $\xi$ : ogólna liczba schwytanych owa-  
dów.

$$\mathcal{X} = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}, \Theta = [0, 1], P_\theta = NB(n, \theta)$$

$$(\{k, k + 1, k + 2, \dots\}, \{NB(n, \theta), \theta \in [0, 1]\})$$

**Pytanie 1.**

Jaki jest odsetek osobników męskich? ( $\theta = ?$ )

**Pytanie 2.**

Czy osobników męskich jest mniej niż żeńskich?  
( $\theta \in \Theta_0 = [0, 1/2)$ )

.....

**Przykład 3.** Z grupy  $N$  osób wśród których jest nieznana liczba  $M$  kobiet losujemy  $n$  osób.

Zmienna losowa  $\xi$ : liczba wylosowanych kobiet.

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, M\}, \quad \theta = M,$$

$$\Theta = \{0, 1, \dots, N\}, \quad P_\theta = H(N, n, M)$$

$$(\{0, 1, \dots, M\}, \{H(N, n, M), M \in \{0, 1, \dots, N\}\})$$

**Pytanie 1.**

Ile jest kobiet w badanej grupie? ( $M = ?$ )

**Pytanie 2.**

Czy odsetek kobiet w grupie przekracza 70%?

( $M \in \Theta_0 = \{0.7N, 0.7N + 1, \dots, N\}$ )

.....

**Przykład 4.** Dokonujemy pomiarów przyrządem o którym **nie wiadomo** czy nie popełnia błędu systematycznego oraz **nieznana** jest jego precyzja.

Zmienna losowa  $\xi$ : błąd pomiaru.

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}, \quad \theta = (\mu, \sigma^2),$$

$$\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad P_\theta = N(\mu, \sigma^2)$$

$$(\mathbb{R}, \{N(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\})$$

**Pytanie 1.**

Jakie są charakterystyki urządzenia pomiarowego?  
( $\mu = ?$ ,  $\sigma^2 = ?$ )

**Pytanie 2.**

Czy urządzenie nie popełnia błędu systematycznego?  
( $(\mu, \sigma^2) \in \Theta_0 = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ )

.....