# Estymacja punktowa

Statystyka: odwzorowanie $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^k$

Punktowy estymator parametru $\theta$:

$$\hat{\theta} : \mathcal{X} \to \Theta$$

Przedziałowy estymator parametru $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$:

$$\underline{\theta}, \overline{\theta} : \mathcal{X} \to \Theta$$

## Kryteria estymacji

**Nieobciążoność**:

$$E_\theta \hat{\theta} = \theta \qquad (\forall \theta \in \Theta)$$

**Błąd średniokwadratowy**:

$$\begin{aligned} R_\theta(\hat{\theta}) &= E_\theta(\hat{\theta}(X) - \theta)^2 \\ &= E_\theta(\hat{\theta}(X) - E_\theta\hat{\theta}(X))^2 + (E_\theta\hat{\theta}(X) - \theta)^2 \\ &= D^2_\theta \hat{\theta}(X) + (E_\theta\hat{\theta}(X) - \theta)^2 \end{aligned}$$

Jeżeli $E_\theta \hat{\theta} = \theta$ $(\forall \theta \in \Theta)$, to $R_\theta(\hat{\theta}) = D^2_\theta \hat{\theta}$

Uwaga: zamiast $(\hat{\theta}(X) - \theta)^2$ można stosować inne miary odległości

**Słaba zgodność**:
estymator $\hat{\theta}$ nazywamy słabo zgodnym, jeżeli dla każdego $\theta \in \Theta$ zbiega on (wraz ze wzrostem liczności próby) do wartości $\theta$ według prawdopodobieństwa $P_\theta$.

**Mocna zgodność**:
estymator $\hat{\theta}$ nazywamy mocno zgodnym, jeżeli dla każdego $\theta \in \Theta$ zbiega on (wraz ze wzrostem liczności próby) do wartości $\theta$ z prawdopodobieństwem $P_\theta$ równym 1.

***Przykład 1.*** Rzucamy $n$–krotnie **jakąś** monetą.
Próba: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — wyniki kolejnych rzutów monetą.

$$(\{0,1\}^n, \{D(\theta),\ \theta \in [0,1]\}^n)$$

Zadanie: oszacować prawdopodobieństwo $\theta$.

Propozycja 1: $\hat{\theta}_1 = X_1$

$$E_\theta \hat{\theta}_1 \overset{?}{=} \theta, \quad D^2_\theta \hat{\theta}_1 \overset{?}{=} \theta(1-\theta)$$

Propozycja 2: $\hat{\theta}_2 = (2X_1 + X_2)/3$

$$E_\theta \hat{\theta}_2 \overset{?}{=} \theta, \quad D^2_\theta \hat{\theta}_2 \overset{?}{=} \frac{5}{9}\theta(1-\theta)$$

Propozycja 3: $\hat{\theta}_3 = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$

$$E_\theta \hat{\theta}_3 \overset{?}{=} \theta, \quad D^2_\theta \hat{\theta}_2 \overset{?}{=} \frac{1}{n}\theta(1-\theta)$$

Zadanie: oszacować $1/\theta$.
Nie istnieje estymator nieobciążony!

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

***Przykład 4.***

Dokonujemy pomiarów przyrządem o którym **nie wiadomo** czy nie popełnia błędu systematycznego oraz **nieznana** jest jego precyzja.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą błędami pomiarów.

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu\mathbf{1}_n, \sigma^2\boldsymbol{I}_n\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

Zadanie: oszacować błąd systematyczny $\mu$ pomiaru.

Propozycja 1: $\hat{\mu}_1 = (X_1 + X_n)/2$

$$E_\theta \hat{\mu}_1 \overset{?}{=} \mu, \quad D^2_\theta \hat{\mu}_1 \overset{?}{=} \sigma^2/2$$

Propozycja 2: $\hat{\mu}_2 = (2X_1 - X_2)$

$$E_\theta \hat{\mu}_2 \overset{?}{=} \mu, \quad D^2_\theta \hat{\mu}_2 \overset{?}{=} 5\sigma^2$$

Propozycja 3: $\hat{\mu}_3 = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$

$$E_\theta \hat{\mu}_3 \overset{?}{=} \mu, \quad D^2_\theta \hat{\mu}_3 \overset{?}{=} \sigma^2/n$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .