

# Estymacja punktowa

Statystyka: odwzorowanie  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^k$

Punktowy estymator parametru  $\theta$ :

$$\hat{\theta} : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$$

Przedziałowy estymator parametru  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ :

$$\underline{\theta}, \bar{\theta} : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$$

## Kryteria estymacji

Nieobciążoność:

$$E_{\theta} \hat{\theta} = \theta \quad (\forall \theta \in \Theta)$$

Błąd średniokwadratowy:

$$\begin{aligned} R_{\theta}(\hat{\theta}) &= E_{\theta}(\hat{\theta}(X) - \theta)^2 \\ &= E_{\theta}(\hat{\theta}(X) - E_{\theta}\hat{\theta}(X))^2 + (E_{\theta}\hat{\theta}(X) - \theta)^2 \\ &= D_{\theta}^2 \hat{\theta}(X) + (E_{\theta}\hat{\theta}(X) - \theta)^2 \end{aligned}$$

Jeżeli  $E_\theta \hat{\theta} = \theta$  ( $\forall \theta \in \Theta$ ), to  $R_\theta(\hat{\theta}) = D_\theta^2 \hat{\theta}$

Uwaga: zamiast  $(\hat{\theta}(X) - \theta)^2$  można stosować inne miary odległości

### **Słaba zgodność:**

estymator  $\hat{\theta}$  nazywamy słabo zgodnym, jeżeli dla każdego  $\theta \in \Theta$  zbiega on (wraz ze wzrostem liczności próby) do wartości  $\theta$  według prawdopodobieństwa  $P_\theta$ .

### **Mocna zgodność:**

estymator  $\hat{\theta}$  nazywamy mocno zgodnym, jeżeli dla każdego  $\theta \in \Theta$  zbiega on (wraz ze wzrostem liczności próby) do wartości  $\theta$  z prawdopodobieństwem  $P_\theta$  równym 1.

**Przykład 1.** Rzucamy  $n$ -krotnie **jakaś** monetą.  
 Próba:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — wyniki kolejnych rzutów  
 monetą.

$$(\{0, 1\}^n, \{D(\theta), \theta \in [0, 1]\}^n)$$

Zadanie: oszacować prawdopodobieństwo  $\theta$ .

Propozycja 1:  $\hat{\theta}_1 = X_1$

$$E_\theta \hat{\theta}_1 \stackrel{?}{=} \theta, \quad D_\theta^2 \hat{\theta}_1 \stackrel{?}{=} \theta(1 - \theta)$$

Propozycja 2:  $\hat{\theta}_2 = (2X_1 + X_2)/3$

$$E_\theta \hat{\theta}_2 \stackrel{?}{=} \theta, \quad D_\theta^2 \hat{\theta}_2 \stackrel{?}{=} \frac{5}{9} \theta(1 - \theta)$$

Propozycja 3:  $\hat{\theta}_3 = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$

$$E_\theta \hat{\theta}_3 \stackrel{?}{=} \theta, \quad D_\theta^2 \hat{\theta}_3 \stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \theta(1 - \theta)$$

Zadanie: oszacować  $1/\theta$ .

Nie istnieje estymator nieobciążony!

.....

**Przykład 4.**

Dokonujemy pomiarów przyrządem o którym **nie wiadomo** czy nie popełnia błędu systematycznego oraz **nieznana** jest jego precyzja.

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą błędami pomiarów.

$$(\mathbb{R}^n, \{N(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\})$$

Zadanie: oszacować błąd systematyczny  $\mu$  pomiaru.

Propozycja 1:  $\hat{\mu}_1 = (X_1 + X_n)/2$

$$E_{\theta} \hat{\mu}_1 \stackrel{?}{=} \mu, \quad D_{\theta}^2 \hat{\mu}_1 \stackrel{?}{=} \sigma^2/2$$

Propozycja 2:  $\hat{\mu}_2 = (2X_1 - X_2)$

$$E_{\theta} \hat{\mu}_2 \stackrel{?}{=} \mu, \quad D_{\theta}^2 \hat{\mu}_2 \stackrel{?}{=} 5\sigma^2$$

Propozycja 3:  $\hat{\mu}_3 = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$

$$E_{\theta} \hat{\mu}_3 \stackrel{?}{=} \mu, \quad D_{\theta}^2 \hat{\mu}_3 \stackrel{?}{=} \sigma^2/n$$

.....