Estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji

Model statystyczny $(\mathcal{X}, \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\})$; $g : \Theta \to \mathbb{R}^1$
Zadanie: oszacować nieznaną wartość $g(\theta)$
Wybrać takie $\delta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ by $(\forall\theta \in \Theta)$

nieobciążoność $\qquad E_\theta\delta(X_1, X_2, \ldots, X_n) = g(\theta)$

minimalna wariancja

$$D^2_\theta(\delta) = E_\theta\left(\delta(X_1, X_2, \ldots, X_n) - g(\theta)\right)^2 = \min$$

Twierdzenie 6.1 *(Rao–Blackwella) Jeżeli $\hat{g}$ jest estymatorem nieobciążonym i jeżeli T jest statystyką dostateczną zupełną, to $E_\theta(\hat{g}|T)$ jest również estymatorem nieobciążonym o jednostajnie nie większej wariancji niż wariancja estymatora $\hat{g}$.* ■

Twierdzenie 6.2 *Jeżeli T jest statystyką dostateczną zupełną i jeżeli dla danej funkcji g istnieje funkcja $\hat{g}$ taka, że*

$$(\forall\theta \in \Theta)\, E_\theta\hat{g}(T) = g(\theta),$$

to $\hat{g}(T)$ jest $ENMW[g(\theta)]$. ■

Przykład (Model dwumianowy).
Model pojedynczej obserwacji X:

$$(\{0,1\}, \{D(\theta),\ \theta \in [0,1]\})$$

Rodzina $\{D(\theta),\ \theta \in [0,1]\}$ jest rodziną wykładniczą:

$$p_\theta(x) = \exp\left\{x \log \frac{\theta}{1-\theta} + \log(1-\theta)\right\},\ x = 0, 1$$

Statystyka dostateczna: $T(x) = x$

Model dla próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$(\{0,1\}, \{D(\theta),\ \theta \in [0,1]\})^n$$

Statystyka dostateczna: $T = \sum X_i$.
Model dla statystyki T

$$(\{0,1,\ldots,n\}, \{B(n,\theta),\ \theta \in [0,1]\})$$

Estymacja parametru θ.

Funkcja g: $g(\theta) = \theta$.

$$ENMW[\theta] = \frac{T}{n}$$

Estymacja wariancji $\theta(1-\theta)$.

Funkcja g: $g(\theta) = \theta(1-\theta)$.
Wyznaczyć $\hat{g}$ taką, że $\forall\theta \in \Theta$

$$E_p\hat{g}(T) = \sum_{t=0}^{n} \hat{g}(t)\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t} = \theta(1-\theta)$$

(*Wskazówka:* $v = \theta/(1-\theta)$)

$$ENMW[\theta(1-\theta)] \overset{?}{=} \frac{T(n-T)}{n(n-1)}$$

. . . .

Przykład (Model Poissona). Model pojedynczej obserwacji X:

$$(\{0,1,2,\ldots\},\{Po(\theta),\ \theta\in\mathbb{R}_+\})$$

Rodzina $\{Po(\theta),\ \theta\in\mathbb{R}_+\}$ jest rodziną wykładniczą:

$$p_\theta(x)=\exp\{-x\log\theta-\theta\}\,x!,\ x=0,1,2,\ldots$$

Statystyka dostateczna: $T(x)=x$

Model dla próby $X_1,X_2,\ldots,X_n$:

$$(\{0,1,2\ldots\},\{Po(\theta),\ \theta\in\mathbb{R}_+\})^n$$

Statystyka dostateczna: $T=\sum X_i$
Model dla statystyki T

$$(\{0,1,2,\ldots\},\{Po\left(n\theta\right),\ \theta\in\mathbb{R}_+\})$$

Estymacja parametru θ.
Funkcja g: $g(\theta) = \theta$.

$$ENMW[\theta] = \frac{T}{n}$$

Estymacja $\lambda = e^{-\theta} = P_\theta\{X = 0\}$. Niech

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } X_j = 0, \\ 0, & \text{jeżeli } X_j > 0. \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \lambda^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$$

Estymator λ^* jest nieobciążony, gdyż

$$E_\theta Y_j = 1 \cdot P_\theta\{X = 0\} + 0 \cdot P_\theta\{X > 0\}$$

Ponieważ T jest dostateczna i zupełna, więc $\hat{\lambda} = E_\theta(\lambda^*|T)$ jest $ENMW[\lambda]$.

$$E_\theta(\lambda^*|T = t) = E_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j|T = t\right)$$
$$= E_\theta\left(Y_1|T = t\right) = P_\theta\{X_1 = 0|T = t\}$$
$$= \sum_{x_2+\cdots+x_n=t} P_\theta\{X_1 = 0, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n|T = t\}$$
$$= \heartsuit$$

$$
\begin{aligned}
&P_\theta\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n | T = t\} \\
&= \frac{P_\theta\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n, T = t\}}{P_\theta\{T = t\}}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \sum x_i \neq t \\ \frac{\theta^{x_1 + \cdots x_n} e^{-n\theta}}{x_1! \ldots x_n!} \cdot \frac{t!}{(n\theta)^t e^{-n\theta}}, & \text{jeżeli } \sum x_i = t \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \sum x_i \neq t \\ \frac{t!}{n^t x_1! \ldots x_n!}, & \text{jeżeli } \sum x_i = t \end{cases}
$$

Ponieważ

$$
(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^t = \sum_{x_1 + \cdots + x_n = t} \frac{t!}{x_1! \ldots x_n!} \alpha_1^{x_1} \cdots \alpha_n^{x_n}
$$

więc

$$
\sum_{x_1 + \cdots + x_n = t} \frac{t!}{x_1! \ldots x_n!} = n^t
$$

Zatem

$$
\heartsuit = \sum_{x_2 + \cdots + x_n = t} \frac{t!}{n^t x_2! \ldots x_n!} = \frac{(n-1)^t}{n^t}
$$

Czyli

$$
\hat{\lambda} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^T
$$

Porównanie wariancji estymatorów λ^* oraz $\hat{\lambda}$

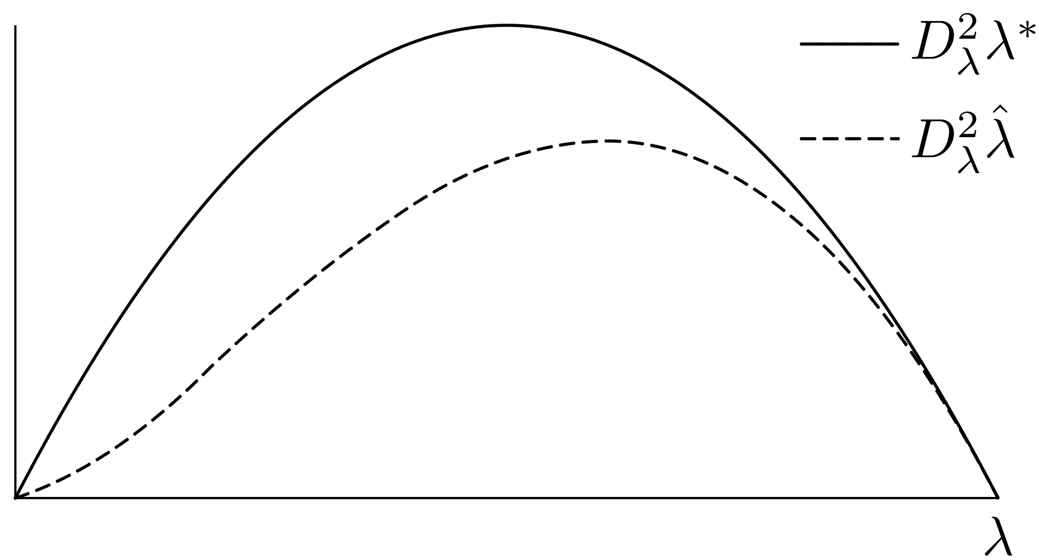
$$D^2_\theta \lambda^* = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n} = \frac{e^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n}$$

$$E_\theta \hat{\lambda}^2 = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^t \right]^2 \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{(n-1)^2}{n}\theta\right]^t}{t!} e^{-n\theta}$$

$$= e^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{(n-1)^2}{n}\theta\right]^t}{t!} e^{-\frac{(n-1)^2}{n}\theta} = e^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)\theta}$$

$$D^2_\theta \hat{\lambda} = e^{-\left(2-\frac{1}{n}\right)\theta} - e^{-2\theta} = \lambda^{\left(2-\frac{1}{n}\right)} - \lambda^2$$



Niech $\varepsilon > 0$

$$P_\lambda\{|\lambda^* - \lambda| < \varepsilon\} = ? \qquad P_\lambda\{|\hat{\lambda} - \lambda| < \varepsilon\} = ?$$

$$P_\lambda\{|\lambda^* - \lambda| < \varepsilon\}$$
$$= P_\lambda\left\{n(\lambda - \varepsilon) < \sum_{i=1}^{n} Y_i < n(\lambda + \varepsilon)\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim B\left(n, \lambda = e^{-\theta}\right)$$

$$P_\lambda\{|\hat{\lambda} - \lambda| < \varepsilon\}$$
$$= P_\lambda\left\{\frac{\log(\lambda + \varepsilon)}{\log(1 - \frac{1}{n})} < \sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{\log(\lambda - \varepsilon)}{\log(1 - \frac{1}{n})}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po\left(n\theta = -n\log\lambda\right)$$

λ	$P_\lambda\{\lvert\hat{\lambda}-\lambda\rvert<\varepsilon\}$	$P_\lambda\{\lvert\lambda^*-\lambda\rvert<\varepsilon\}$
	$\varepsilon = 0.05;\ n = 50$	
0.1	0.9793	0.7661
0.2	0.8358	0.6235
0.3	0.7275	0.5593
0.4	0.6256	0.5291
0.5	0.6052	0.5201
0.6	0.5719	0.5291
0.7	0.5912	0.5593
0.8	0.6240	0.6235
0.9	0.8092	0.7661
	$\varepsilon = 0.01;\ n = 50$	
0.1	0.3590	0.1850
0.2	0.2197	0.1398
0.3	0.2036	0.1223
0.4	0.1176	0.1146
0.5	0.1350	0.1123
0.6	0.1567	0.1146
0.7	0.1879	0.1223
0.8	0.1192	0.1398
0.9	0.1743	0.1849

. . . .

Przykład (Model gaussowski). Model pojedynczej obserwacji X:

$$\left(\mathbb{R}, \left\{N\left(\mu, \sigma^2\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

Rodzina $\left\{N\left(\mu, \sigma^2\right), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}$ jest wykładnicza

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x - \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)\right)\right\}$$

Statystyka dostateczna: $(T_1(x), T_2(x)) = (x, x^2)$

Model dla próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\left(\mathbb{R}, \left\{N\left(\mu, \sigma^2\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)^n =$$

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

Statystyka dostateczna: $(T_1, T_2) = (\sum X_i, \sum X_i^2)$

Niech

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, & \mu \text{ znane,} \\ \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, & \mu \text{ nie znane.} \end{cases}$$

Zmienna losowa S^2/σ^2 ma rozkład chi–kwadrat z ν stopniami swobody:

$$\nu = \begin{cases} n, & \mu \text{ znane}, \\ n-1, & \mu \text{ nie znane}. \end{cases}$$

$$E_{\mu,\sigma} S^\alpha = \begin{cases} \dfrac{\sigma^\alpha}{K_{\nu,\alpha}}, & \nu+\alpha > 0, \\ \infty, & \nu+\alpha \le 0, \end{cases}$$

gdzie $K_{\nu,\alpha} = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) / \left(2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu+\alpha}{2}\right)\right)$

Jeżeli μ oraz σ nie są znane, to

$$ENMW[\mu] \overset{?}{=} \bar{X}$$

$$ENMW[\sigma^2] \overset{?}{=} \frac{1}{n-1} S^2$$

$$ENMW[\sigma] \overset{?}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} S$$

$$ENMW\left[\frac{\mu}{\sigma}\right] \overset{?}{=} \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \frac{\bar{X}}{S}$$

. . . .

Definicja 6.1 *Ilością informacji o θ zawartą w X* nazywamy wielkość $I_\theta = E_\theta[\{\partial \log p_\theta(X)/\partial\theta\}^2]$. □

Twierdzenie 6.3 *(Nierówność Cramera–Rao)* *Niech $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ będzie rodziną rozkładów, niech θ będzie parametrem liczbowym i niech Θ będzie przedziałem na prostej. Zakładamy, że dla każdego θ rozkład P_θ ma gęstość p_θ. Jeżeli spełnione są pewne warunki regularności, to nierówność*

$$D^2_\theta \theta^* \geq I_\theta^{-1}$$

spełniona jest dla każdego estymatora nieobciążonego θ^* parametru θ. ■

Definicja 6.2 Liczbę

$$\mathrm{eff}(\theta^*) = \frac{I_\theta^{-1}}{D^2_\theta \theta^*}$$

nazywamy *efektywnością* estymatora θ^*. □

Lemat. Jeżeli spełnione są warunki regularności, to

$$I_\theta = E_\theta\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p_\theta(X)\right]$$

Przykład (Model gaussowski). Model dla próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu\mathbf{1}_n, \sigma^2\boldsymbol{I}_n\right),\ \mu \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

Obliczamy I_μ

$$p_\mu(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right\}$$

$$\log p_\mu(\boldsymbol{x}) = -n\log\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log p_\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\log p_\mu(\boldsymbol{x}) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

Zatem

$$I_\mu = \frac{n}{\sigma^2}$$

Ponieważ $D^2\bar{X} = \sigma^2/n$, więc

$$\mathrm{eff}(\bar{X}) = 1$$

. . . .

Przykład . Model pojedynczej obserwacji X:

$$(\{1, 2, \ldots\}, \{P_\theta : \theta > 0\})$$

$$P_\theta\{X = x\} = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!(1 - e^{-\theta})}$$

Zadanie: oszacować $e^{-\theta}$ na podstawie jednej obserwacji

$T(X)$ jest $ENMW[e^{-\theta}]$, jeżeli

$$\sum_{x=1}^{\infty} T(x) \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!(1 - e^{-\theta})} = e^{-\theta}$$

Rozwiązanie:

$$T(x) = (-1)^{x+1}$$

. . . .

Przykład . Model pojedynczej obserwacji X:

$$(\mathbb{Z}, \{P_\theta : \theta \in \mathbb{Z}\})$$

$$P_\theta\{X = \theta - 1\} = P_\theta\{X = \theta\} = P_\theta\{X = \theta + 1\} = \frac{1}{3}$$

Estymator nieobciążony: $\hat{\theta}(X) = X$
Wariancja: $D^2\hat{\theta} \stackrel{?}{=} 2/3$

Niech $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ oraz

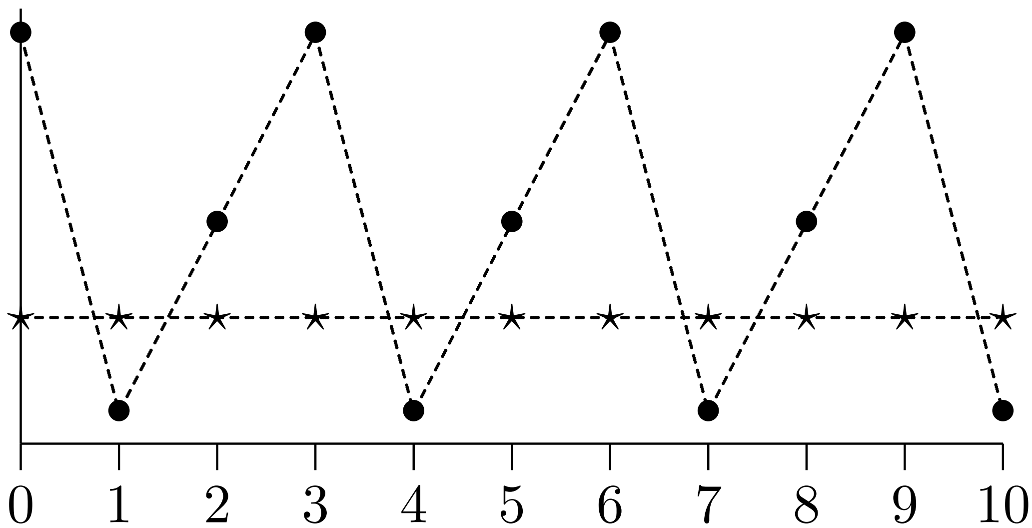
$$\delta(x) = \begin{cases} a_0, & \mathrm{mod}(x;3) = 0 \\ a_1, & \mathrm{mod}(x;3) = 1 \\ a_2, & \mathrm{mod}(x;3) = 2 \end{cases}$$

Niech $\theta^*(X) = X + \delta(X)$

$$E_\theta\theta^* = \theta \quad (\forall \theta \in \Theta)$$

$$D^2_\theta\theta^* \stackrel{?}{=}$$

$$\begin{cases} ((a_2-1)^2 + a_0^2 + (a_1+1)^2)/3, & \mathrm{mod}(\theta;3) = 0 \\ ((a_0-1)^2 + a_1^2 + (a_2+1)^2)/3, & \mathrm{mod}(\theta;3) = 1 \\ ((a_1-1)^2 + a_2^2 + (a_0+1)^2)/3, & \mathrm{mod}(\theta;3) = 2 \end{cases}$$



$\star$: $D^2_\theta \hat{\theta}$

$\bullet$: $D^2_\theta \theta^* \; (a_0 = 0.5, a_1 = 0.5, a_2 = -1)$

Wniosek: nie istnieje $ENMW[\theta]$

. . . .