

Estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji

Model statystyczny $(\mathcal{X}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$; $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^1$

Zadanie: oszacować nieznaną wartość $g(\theta)$

Wybrać takie $\delta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ by $(\forall \theta \in \Theta)$

nieobciążoność $E_\theta \delta(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(\theta)$

minimalna wariancja

$$D_\theta^2(\delta) = E_\theta (\delta(X_1, X_2, \dots, X_n) - g(\theta))^2 = \min$$

Twierdzenie 6.1 (*Rao–Blackwella*) *Jeżeli \hat{g} jest estymatorem nieobciążonym i jeżeli T jest statystyką dostateczną zupełną, to $E_\theta(\hat{g}|T)$ jest również estymatorem nieobciążonym o jednostajnie nie większej wariancji niż wariancja estymatora \hat{g} . ■*

Twierdzenie 6.2 *Jeżeli T jest statystyką dostateczną zupełną i jeżeli dla danej funkcji g istnieje funkcja \hat{g} taka, że*

$$(\forall \theta \in \Theta) E_\theta \hat{g}(T) = g(\theta),$$

to $\hat{g}(T)$ jest ENMW[$g(\theta)$]. ■

Przykład (Model dwumianowy).

Model pojedynczej obserwacji X :

$$(\{0, 1\}, \{D(\theta), \theta \in [0, 1]\})$$

Rodzina $\{D(\theta), \theta \in [0, 1]\}$ jest rodziną wykładniczą:

$$p_{\theta}(x) = \exp \left\{ x \log \frac{\theta}{1 - \theta} + \log(1 - \theta) \right\}, \quad x = 0, 1$$

Statystyka dostateczna: $T(x) = x$

Model dla próby X_1, X_2, \dots, X_n :

$$(\{0, 1\}, \{D(\theta), \theta \in [0, 1]\})^n$$

Statystyka dostateczna: $T = \sum X_i$.

Model dla statystyki T

$$(\{0, 1, \dots, n\}, \{B(n, \theta), \theta \in [0, 1]\})$$

Estymacja parametru θ .

Funkcja g : $g(\theta) = \theta$.

$$ENMW[\theta] = \frac{T}{n}$$

Estymacja wariancji $\theta(1 - \theta)$.

Funkcja g : $g(\theta) = \theta(1 - \theta)$.

Wyznaczyć \hat{g} taką, że $\forall \theta \in \Theta$

$$E_p \hat{g}(T) = \sum_{t=0}^n \hat{g}(t) \binom{n}{t} \theta^t (1 - \theta)^{n-t} = \theta(1 - \theta)$$

(Wskazówka: $v = \theta/(1 - \theta)$)

$$ENMW[\theta(1 - \theta)] \stackrel{?}{=} \frac{T(n - T)}{n(n - 1)}$$

.....

Przykład (Model Poissona). Model pojedynczej obserwacji X :

$$(\{0, 1, 2, \dots\}, \{Po(\theta), \theta \in \mathbb{R}_+\})$$

Rodzina $\{Po(\theta), \theta \in \mathbb{R}_+\}$ jest rodziną wykładniczą:

$$p_\theta(x) = \exp\{-x \log \theta - \theta\} x!, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Statystyka dostateczna: $T(x) = x$

Model dla próby X_1, X_2, \dots, X_n :

$$(\{0, 1, 2, \dots\}, \{Po(\theta), \theta \in \mathbb{R}_+\})^n$$

Statystyka dostateczna: $T = \sum X_i$

Model dla statystyki T

$$(\{0, 1, 2, \dots\}, \{Po(n\theta), \theta \in \mathbb{R}_+\})$$

Estymacja parametru θ .

Funkcja g : $g(\theta) = \theta$.

$$ENMW[\theta] = \frac{T}{n}$$

Estymacja $\lambda = e^{-\theta} = P_{\theta}\{X = 0\}$. Niech

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } X_j = 0, \\ 0, & \text{jeżeli } X_j > 0. \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

Estymator λ^* jest nieobciążony, gdyż

$$E_{\theta} Y_j = 1 \cdot P_{\theta}\{X = 0\} + 0 \cdot P_{\theta}\{X > 0\}$$

Ponieważ T jest dostateczna i zupełna, więc $\hat{\lambda} = E_{\theta}(\lambda^*|T)$ jest $ENMW[\lambda]$.

$$\begin{aligned} E_{\theta}(\lambda^*|T = t) &= E_{\theta} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j | T = t \right) \\ &= E_{\theta} (Y_1 | T = t) = P_{\theta}\{X_1 = 0 | T = t\} \\ &= \sum_{x_2 + \dots + x_n = t} P_{\theta}\{X_1 = 0, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n | T = t\} \\ &= \heartsuit \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_\theta\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n | T = t\} \\
&= \frac{P_\theta\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n, T = t\}}{P_\theta\{T = t\}} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \sum x_i \neq t \\ \frac{\theta^{x_1 + \dots + x_n} e^{-n\theta}}{x_1! \dots x_n!} \cdot \frac{t!}{(n\theta)^t e^{-n\theta}}, & \text{jeżeli } \sum x_i = t \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \sum x_i \neq t \\ \frac{t!}{n^t x_1! \dots x_n!}, & \text{jeżeli } \sum x_i = t \end{cases}
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^t = \sum_{x_1 + \dots + x_n = t} \frac{t!}{x_1! \dots x_n!} \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n}$$

więc

$$\sum_{x_1 + \dots + x_n = t} \frac{t!}{x_1! \dots x_n!} = n^t$$

Zatem

$$\heartsuit = \sum_{x_2 + \dots + x_n = t} \frac{t!}{n^t x_2! \dots x_n!} = \frac{(n-1)^t}{n^t}$$

Czyli

$$\hat{\lambda} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^T$$

Porównanie wariancji estymatorów λ^* oraz $\hat{\lambda}$

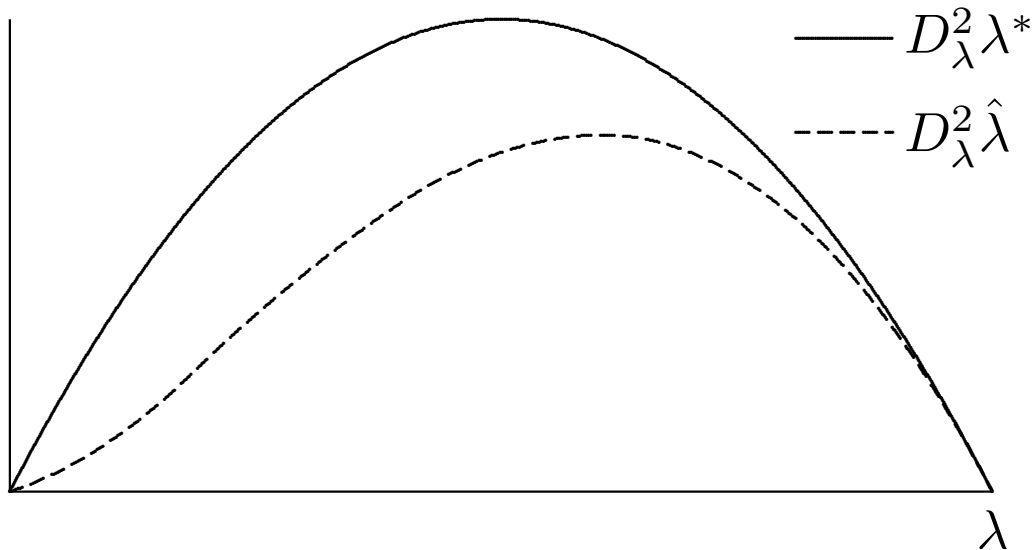
$$D_{\theta}^2 \lambda^* = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n} = \frac{e^{-\theta}(1-e^{-\theta})}{n}$$

$$E_{\theta} \hat{\lambda}^2 = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^t \right]^2 \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{(n-1)^2}{n} \theta \right]^t}{t!} e^{-n\theta}$$

$$= e^{-(2+\frac{1}{n})\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{(n-1)^2}{n} \theta \right]^t}{t!} e^{-\frac{(n-1)^2}{n}\theta} = e^{-(2+\frac{1}{n})\theta}$$

$$D_{\theta}^2 \hat{\lambda} = e^{-(2-\frac{1}{n})\theta} - e^{-2\theta} = \lambda(2-\frac{1}{n}) - \lambda^2$$



Niech $\varepsilon > 0$

$$P_\lambda\{|\lambda^* - \lambda| < \varepsilon\} =? \quad P_\lambda\{|\hat{\lambda} - \lambda| < \varepsilon\} =?$$

$$\begin{aligned} P_\lambda\{|\lambda^* - \lambda| < \varepsilon\} \\ = P_\lambda\left\{n(\lambda - \varepsilon) < \sum_{i=1}^n Y_i < n(\lambda + \varepsilon)\right\} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i \sim B(n, \lambda = e^{-\theta})$$

$$\begin{aligned} P_\lambda\{|\hat{\lambda} - \lambda| < \varepsilon\} \\ = P_\lambda\left\{\frac{\log(\lambda + \varepsilon)}{\log(1 - \frac{1}{n})} < \sum_{i=1}^n X_i < \frac{\log(\lambda - \varepsilon)}{\log(1 - \frac{1}{n})}\right\} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim Po(n\theta = -n \log \lambda)$$

λ	$P_\lambda\{ \hat{\lambda} - \lambda < \varepsilon\}$	$P_\lambda\{ \lambda^* - \lambda < \varepsilon\}$
$\varepsilon = 0.05; n = 50$		
0.1	0.9793	0.7661
0.2	0.8358	0.6235
0.3	0.7275	0.5593
0.4	0.6256	0.5291
0.5	0.6052	0.5201
0.6	0.5719	0.5291
0.7	0.5912	0.5593
0.8	0.6240	0.6235
0.9	0.8092	0.7661
$\varepsilon = 0.01; n = 50$		
0.1	0.3590	0.1850
0.2	0.2197	0.1398
0.3	0.2036	0.1223
0.4	0.1176	0.1146
0.5	0.1350	0.1123
0.6	0.1567	0.1146
0.7	0.1879	0.1223
0.8	0.1192	0.1398
0.9	0.1743	0.1849

.....

Przykład (Model gaussowski). Model pojedynczej obserwacji X :

$$(\mathbb{R}, \{N(\mu, \sigma^2), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\})$$

Rodzina $\{N(\mu, \sigma^2), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ jest wykładnicza

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x - \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log(\sigma\sqrt{2\pi}) \right) \right\}$$

Statystyka dostateczna: $(T_1(x), T_2(x)) = (x, x^2)$

Model dla próby X_1, X_2, \dots, X_n :

$$(\mathbb{R}, \{N(\mu, \sigma^2), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\})^n =$$

$$(\mathbb{R}^n, \{N(\mu\mathbf{1}_n, \sigma^2\mathbf{I}_n), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\})$$

Statystyka dostateczna: $(T_1, T_2) = (\sum X_i, \sum X_i^2)$

Niech

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, & \mu \text{ znane,} \\ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, & \mu \text{ nie znane.} \end{cases}$$

Zmienna losowa S^2/σ^2 ma rozkład chi-kwadrat z ν stopniami swobody:

$$\nu = \begin{cases} n, & \mu \text{ znane,} \\ n - 1, & \mu \text{ nie znane.} \end{cases}$$

$$E_{\mu,\sigma} S^\alpha = \begin{cases} \frac{\sigma^\alpha}{K_{\nu,\alpha}}, & \nu + \alpha > 0, \\ \infty, & \nu + \alpha \leq 0, \end{cases}$$

gdzie $K_{\nu,\alpha} = \Gamma(\frac{\nu}{2}) / (2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\nu+\alpha}{2}))$

Jeżeli μ oraz σ nie są znane, to

$$ENMW[\mu] \stackrel{?}{=} \bar{X}$$

$$ENMW[\sigma^2] \stackrel{?}{=} \frac{1}{n-1} S^2$$

$$ENMW[\sigma] \stackrel{?}{=} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})} S$$

$$ENMW \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} \frac{\bar{X}}{S}$$

.....

Definicja 6.1 Ilością informacji o θ zawartą w X nazywamy wielkość $I_\theta = E_\theta[\{\partial \log p_\theta(X)/\partial \theta\}^2]$. \square

Twierdzenie 6.3 (Nierówność Cramera–Rao)

Niech $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ będzie rodziną rozkładów, niech θ będzie parametrem liczbowym i niech Θ będzie przedziałem na prostej. Zakładamy, że dla każdego θ rozkład P_θ ma gęstość p_θ . Jeżeli spełnione są pewne warunki regularności, to nierówność

$$D_\theta^2 \theta^* \geq I_\theta^{-1}$$

spełniona jest dla każdego estymatora nieobciążonego θ^* parametru θ . \blacksquare

Definicja 6.2 Liczbę

$$\text{eff}(\theta^*) = \frac{I_\theta^{-1}}{D_\theta^2 \theta^*}$$

nazywamy efektywnością estymatora θ^* . \square

Lemat. Jeżeli spełnione są warunki regularności, to

$$I_\theta = E_\theta \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log p_\theta(X) \right]$$

Przykład (Model gaussowski). Model dla próby X_1, X_2, \dots, X_n :

$$(\mathbb{R}^n, \{N(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n), \mu \in \mathbb{R}\})$$

Obliczamy I_μ

$$p_\mu(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right\}$$

$$\log p_\mu(\mathbf{x}) = -n \log(\sigma \sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log p_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log p_\mu(\mathbf{x}) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

Zatem

$$I_\mu = \frac{n}{\sigma^2}$$

Ponieważ $D^2 \bar{X} = \sigma^2/n$, więc

$$\text{eff}(\bar{X}) = 1$$

.....

Przykład . Model pojedynczej obserwacji X :

$$(\{1, 2, \dots\}, \{P_\theta : \theta > 0\})$$

$$P_\theta\{X = x\} = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!(1 - e^{-\theta})}$$

Zadanie: oszacować $e^{-\theta}$ na podstawie jednej obserwacji

$T(X)$ jest *ENMW* $[e^{-\theta}]$, jeżeli

$$\sum_{x=1}^{\infty} T(x) \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!(1 - e^{-\theta})} = e^{-\theta}$$

Rozwiązanie:

$$T(x) = (-1)^{x+1}$$

.....

Przykład . Model pojedynczej obserwacji X :

$$(\mathbb{Z}, \{P_\theta : \theta \in \mathbb{Z}\})$$

$$P_\theta\{X = \theta - 1\} = P_\theta\{X = \theta\} = P_\theta\{X = \theta + 1\} = \frac{1}{3}$$

Estymator nieobciążony: $\hat{\theta}(X) = X$

Wariancja: $D^2\hat{\theta} \stackrel{?}{=} 2/3$

Niech $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ oraz

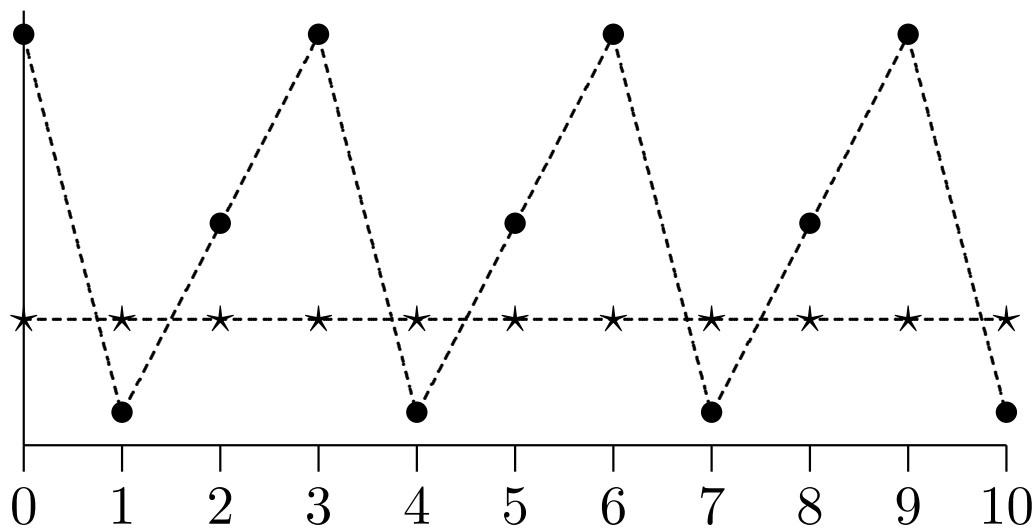
$$\delta(x) = \begin{cases} a_0, & \text{mod}(x; 3) = 0 \\ a_1, & \text{mod}(x; 3) = 1 \\ a_2, & \text{mod}(x; 3) = 2 \end{cases}$$

Niech $\theta^*(X) = X + \delta(X)$

$$E_\theta\theta^* = \theta \quad (\forall \theta \in \Theta)$$

$$D_\theta^2\theta^* \stackrel{?}{=}$$

$$\begin{cases} ((a_2 - 1)^2 + a_0^2 + (a_1 + 1)^2)/3, & \text{mod}(\theta; 3) = 0 \\ ((a_0 - 1)^2 + a_1^2 + (a_2 + 1)^2)/3, & \text{mod}(\theta; 3) = 1 \\ ((a_1 - 1)^2 + a_2^2 + (a_0 + 1)^2)/3, & \text{mod}(\theta; 3) = 2 \end{cases}$$



★ : $D_{\theta}^2 \hat{\theta}$

● : $D_{\theta}^2 \theta^*$ ($a_0 = 0.5, a_1 = 0.5, a_2 = -1$)

Wniosek: nie istnieje $ENMW[\theta]$

.....