Metoda największej wiarogodności

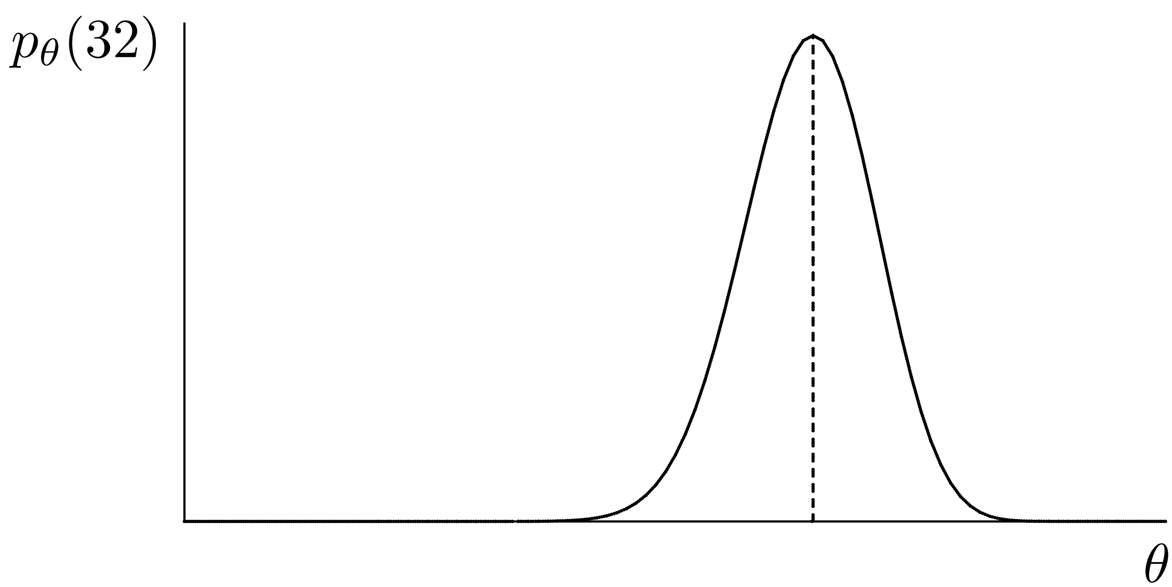
Przykład wstępny. Wykonano 50 rzutów nieznaną monetą i otrzymano 32 orły. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie?
Model statystyczny liczby orłów:

$$(\{0, 1, \ldots, 50\}, \{B\,(50, \theta)\,,\ \theta \in [0, 1]\})$$

Prawdopodobieństwo uzyskania 32 orłów w 50 rzutach

$$p_\theta(32) = \binom{50}{32}\theta^{32}(1-\theta)^{50-32}$$

Dla jakiego θ uzyskanie 32 orłów jest najbardziej prawdopodobne?



. . . .

Definicja 7.1 Dla ustalonego $x \in \mathcal{X}$ wielkość

$$L(\theta; x) = p_\theta(x)$$

nazywamy wiarogodnością parametru θ, gdy zaobserwowano x. $\square$

Definicja 7.2 Jeżeli przy każdym ustalonym $x \in \mathcal{X}$ istnieje $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x) \in \Theta$ takie, że

$$L(\hat{\theta}; x) \geq L(\theta; x) \quad (\forall \theta \in \Theta),$$

to odwzorowanie $\hat{\theta} : \mathcal{X} \to \Theta$ nazywamy estymatorem największej wiarogodności. $\square$

Twierdzenie 7.1 *Jeżeli $h : \Theta \to \Theta$ jest funkcją różnowartościową oraz $\hat{\theta}$ jest $ENW[\theta]$, to $h(\hat{\theta})$ jest $ENW[h(\theta)]$.* $\blacksquare$

Definicja 7.3 Jeżeli $h : \Theta \to \Theta$, to $ENW[h(\theta)]$ określamy jako $h(\hat{\theta})$, gdzie $\hat{\theta}$ jest $ENW[\theta]$. $\square$

Uwaga techniczna: rozważyć $\mathcal{L} = \log L$

Przykład (Model dwumianowy). Skonstruować $ENW[\theta]$ na podstawie próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Wiarogodność parametru θ:

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t} \qquad \left(t = \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

$$\mathcal{L}(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \log \binom{n}{t} + t \log \theta + (n-t) \log(1-\theta)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = \frac{t}{\theta} - \frac{n-t}{1-\theta} = 0$$

$$ENW[\theta] \overset{?}{=} \frac{T}{n}$$

. . . .

Przykład (Model Poissona).
Skonstruować $ENW[\theta]$ oraz $ENW[e^{-\theta}]$ na podstawie próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Wiarogodność parametru θ:

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-(n\theta)} \qquad \left(t = \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\mathcal{L}(\theta; x_1, \ldots, x_n) = t \log n + t \log \theta - \log(t!) - n\theta$$

$$ENW[\theta] = \frac{T}{n} \overset{\text{ozn}}{=\!=\!=} \tilde{\theta}$$

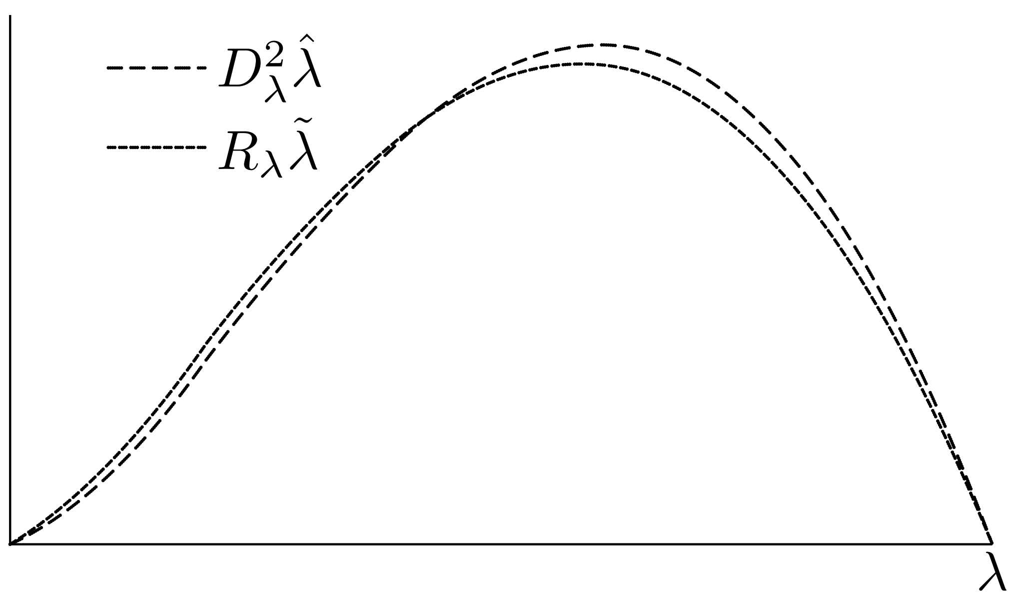
Jeżeli $\lambda = e^{-\theta}$, to $ENW[\lambda] = e^{-\tilde{\theta}} (\overset{\text{ozn}}{=\!=\!=} \tilde{\lambda})$

$$R_{\tilde{\lambda}}(\lambda) = E_\theta(\tilde{\lambda} - \lambda)^2 = E_\theta \tilde{\lambda}^2 - 2\lambda E_\theta \tilde{\lambda} + \lambda^2$$

$$\begin{aligned} E_\theta \tilde{\lambda}^2 &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^2 \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta} \\ &= e^{-n\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta e^{-\frac{2}{n}})^t}{t!} \\ &= \exp\left\{-n\theta \left(1 - e^{-\frac{2}{n}}\right)\right\} \\ &= \lambda^{n(1-e^{-\frac{2}{n}})} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_\theta \tilde{\lambda} &= \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\frac{t}{n}} \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta} \\
&= e^{-n\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta e^{-\frac{1}{n}})^t}{t!} \\
&= \exp\left\{-n\theta\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\right\} \\
&= \lambda^{n(1-e^{-\frac{1}{n}})}
\end{aligned}
$$

$$
R_{\tilde{\lambda}}(\lambda) = \lambda^{n(1-e^{-\frac{2}{n}})} - 2\lambda^{1+n(1-e^{-\frac{1}{n}})} + \lambda^2
$$



. . . .

Przykład (Model gaussowski).

Skonstruować $ENW[\mu]$ i $ENW[\sigma^2]$ na podstawie próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Wiarogodność parametru (μ, σ^2)

$$
\begin{aligned}
& L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) \\
= \quad & \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) \\
& \quad = -n \log \sqrt{2\pi} - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0
\end{cases}
$$

$$
ENW[\mu] \overset{?}{=} \bar{X}
$$

$$
ENW[\sigma^2] \overset{?}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2
$$

Porównanie estymatorów wariancji ($c > 0$):

$$R_{\mu,\sigma^2}\left(c\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)$$

$$=E_{\mu,\sigma^2}\left[c\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2-\sigma^2\right]^2$$

$$\overset{?}{=}\sigma^4\left[c^2(n^2-1)-2c(n-1)+1\right]$$

$$R_{\mu,\sigma^2}(ENMW[\sigma^2])\overset{?}{=}\frac{2}{n-1}\sigma^4$$

$$R_{\mu,\sigma^2}(ENW[\sigma^2])\overset{?}{=}\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

Estymatorem typu $c\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ o jednostajnie najmniejszym ryzyku jest

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

. . . .

Niech $p_\theta(x)$ spełniają pewne warunki regularności.

Twierdzenie 7.2 *Jeżeli $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości $p_\theta(x)$, to równanie wiarogodności*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[p_\theta(x_1)\cdots p_\theta(x_n)] = 0$$

ma rozwiązanie $\hat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$ takie, że

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}\left\{\left|\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n) - \theta_0\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

oraz

$$(*) \qquad \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n) - \theta_0\right) \to N\left(0, \frac{1}{I_\theta}\right).$$

■

Definicja 7.4 Estymator $\hat{\theta}_n$ spełniający warunek $(*)$ nazywamy *asymptotycznie efektywnym.* □

Przykład . Estymujemy parametr θ jednoparametrowej rodziny wykładniczej

$$p_\theta(x) = \exp\{\theta T(x) - b(\theta)\}$$

Wiarogodność próby

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \exp\left\{\theta \sum_{i=1}^{n} T(x_i) - nb(\theta)\right\}$$

$\hat{\theta}_n = ENW[\theta]$ istnieje i jest rozwiązaniem równania

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i) = b'(\theta)$$

Ponadto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta_0\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \to N\left(0, \frac{1}{I_\theta = D^2_\theta T}\right).$$

. . . .

Przykład . Model statystyczny

$$\left(\mathbb{R}, \left\{P_{\mu,\sigma^2} : (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

$$\begin{aligned} p_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right\} \\ + \frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

Wiarogodność próby

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{\mu,\sigma^2}(x_i)$$

Dla każdego $M > 0$ istnieją (μ, σ) takie, że

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \ldots, x_n) > M$$

. . . .

Przykład . Model statystyczny

$$\left(\mathbb{R}, \left\{U\left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right) : \theta \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

$$p_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \\ \begin{cases} 1, & \text{gdy } \theta - \frac{1}{2} \le x_1, \ldots, x_n \le \theta + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wiarogodność próby

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \\ \begin{cases} 1, & \text{gdy } x_{n:n} - \frac{1}{2} \le \theta \le x_{1:n} + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Każda liczba z przedziału $\left[X_{n:n} - \frac{1}{2}, X_{1:n} + \frac{1}{2}\right]$ jest $ENW[\theta]$.

. . . .

Przykład . Model statystyczny

$$(\mathbb{R}_+, \{P_\theta : \theta \in \mathbb{R}_+\})$$

$$p_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \exp\left\{-x^\theta\right\}$$

Logarytm wiarogodności próby

$$\mathcal{L}(\theta; x_1, \ldots, x_n) =$$
$$n \log\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \exp\{\theta \log x_i\}$$

Pochodna

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \log x_i \exp\{\theta \log x_i\}$$

Istnieje $ENW[\theta]$

. . . .