

Metoda największej wiarogodności

Przykład wstępny. Wykonano 50 rzutów nieznaną monetą i otrzymano 32 orły. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie?

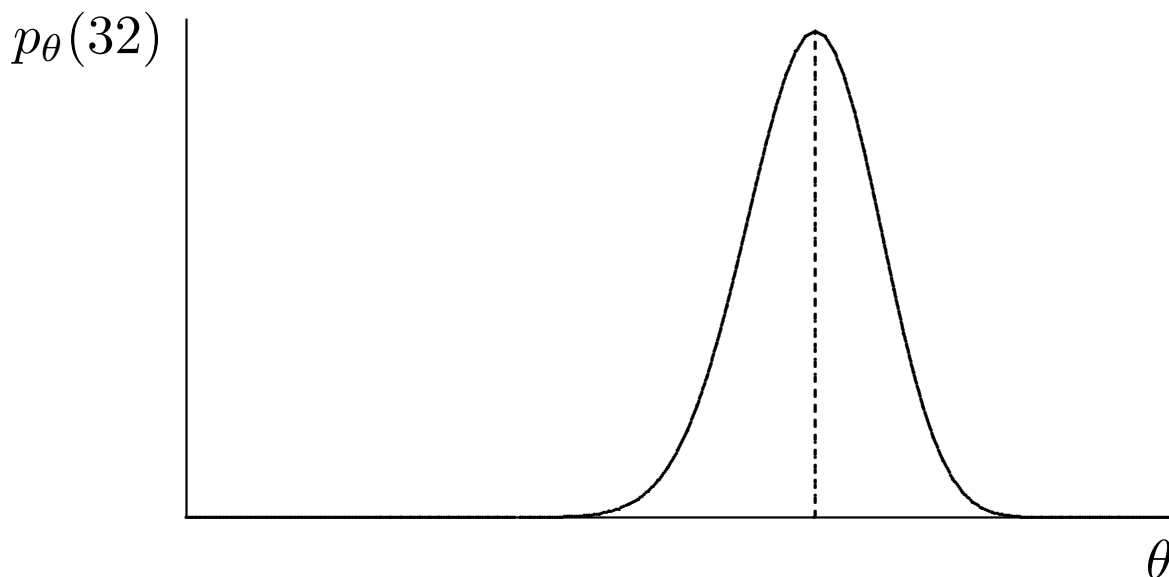
Model statystyczny liczby orłów:

$$(\{0, 1, \dots, 50\}, \{B(50, \theta), \theta \in [0, 1]\})$$

Prawdopodobieństwo uzyskania 32 orłów w 50 rzutach

$$p_{\theta}(32) = \binom{50}{32} \theta^{32} (1 - \theta)^{50-32}$$

Dla jakiego θ uzyskanie 32 orłów jest najbardziej prawdopodobne?



Definicja 7.1 Dla ustalonego $x \in \mathcal{X}$ wielkość

$$L(\theta; x) = p_\theta(x)$$

nazywamy wiarygodnością parametru θ , gdy zaobserwowano x . \square

Definicja 7.2 Jeżeli przy każdym ustalonym $x \in \mathcal{X}$ istnieje $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x) \in \Theta$ takie, że

$$L(\hat{\theta}; x) \geq L(\theta; x) \quad (\forall \theta \in \Theta),$$

to odwzorowanie $\hat{\theta} : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$ nazywamy estymatorem największej wiarygodności. \square

Twierdzenie 7.1 Jeżeli $h : \Theta \rightarrow \Theta$ jest funkcją różnowartościową oraz $\hat{\theta}$ jest $ENW[\theta]$, to $h(\hat{\theta})$ jest $ENW[h(\theta)]$. \blacksquare

Definicja 7.3 Jeżeli $h : \Theta \rightarrow \Theta$, to $ENW[h(\theta)]$ określamy jako $h(\hat{\theta})$, gdzie $\hat{\theta}$ jest $ENW[\theta]$. \square

Uwaga techniczna: rozważyć $\mathcal{L} = \log L$

Przykład (Model dwumianowy). Skonstruować $ENW[\theta]$ na podstawie próby X_1, X_2, \dots, X_n .

Wiarogodność parametru θ :

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \binom{n}{t} \theta^t (1 - \theta)^{n-t} \quad \left(t = \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = \log \binom{n}{t} + t \log \theta + (n-t) \log(1-\theta)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = \frac{t}{\theta} - \frac{n-t}{1-\theta} = 0$$

$$ENW[\theta] \stackrel{?}{=} \frac{T}{n}$$

.....

Przykład (Model Poissona).

Skonstruować $ENW[\theta]$ oraz $ENW[e^{-\theta}]$ na podstawie próby X_1, X_2, \dots, X_n .

Wiarogodność parametru θ :

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-(n\theta)} \quad \left(t = \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = t \log n + t \log \theta - \log(t!) - n\theta$$

$$ENW[\theta] = \frac{T}{n} \stackrel{\text{ozn}}{=} \tilde{\theta}$$

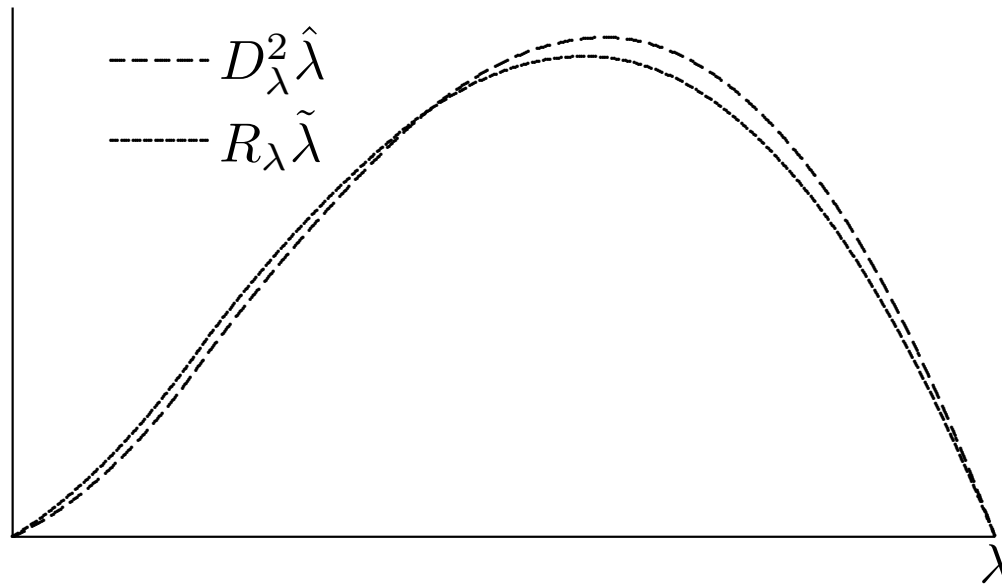
Jeżeli $\lambda = e^{-\theta}$, to $ENW[\lambda] = e^{-\tilde{\theta}} \stackrel{\text{ozn}}{=} \tilde{\lambda}$

$$R_{\tilde{\lambda}}(\lambda) = E_{\theta}(\tilde{\lambda} - \lambda)^2 = E_{\theta} \tilde{\lambda}^2 - 2\lambda E_{\theta} \tilde{\lambda} + \lambda^2$$

$$\begin{aligned} E_{\theta} \tilde{\lambda}^2 &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{n}} \right)^2 \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta} \\ &= e^{-n\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta e^{-\frac{2}{n}})^t}{t!} \\ &= \exp \left\{ -n\theta \left(1 - e^{-\frac{2}{n}} \right) \right\} \\ &= \lambda^{n(1 - e^{-\frac{2}{n}})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\theta} \tilde{\lambda} &= \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\frac{t}{n}} \frac{(n\theta)^t}{t!} e^{-n\theta} \\
&= e^{-n\theta} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta e^{-\frac{1}{n}})^t}{t!} \\
&= \exp \left\{ -n\theta \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \right\} \\
&= \lambda^{n(1-e^{-\frac{1}{n}})}
\end{aligned}$$

$$R_{\tilde{\lambda}}(\lambda) = \lambda^{n(1-e^{-\frac{2}{n}})} - 2\lambda^{1+n(1-e^{-\frac{1}{n}})} + \lambda^2$$



.....

Przykład (Model gaussowski).

Skonstruować $ENW[\mu]$ i $ENW[\sigma^2]$ na podstawie próby X_1, X_2, \dots, X_n .

Wiarogodność parametru (μ, σ^2)

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) \\ = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) \\ = -n \log \sqrt{2\pi} - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases}$$

$$ENW[\mu] \stackrel{?}{=} \bar{X}$$

$$ENW[\sigma^2] \stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Porównanie estymatorów wariancji ($c > 0$):

$$\begin{aligned}
 & R_{\mu, \sigma^2} \left(c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \\
 &= E_{\mu, \sigma^2} \left[c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - \sigma^2 \right]^2 \\
 & \stackrel{?}{=} \sigma^4 [c^2(n^2 - 1) - 2c(n - 1) + 1]
 \end{aligned}$$

$$R_{\mu, \sigma^2}(ENMW[\sigma^2]) \stackrel{?}{=} \frac{2}{n-1} \sigma^4$$

$$R_{\mu, \sigma^2}(ENW[\sigma^2]) \stackrel{?}{=} \frac{2n-1}{n^2} \sigma^4$$

Estymatorem typu $c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ o jednostajnie najmniejszym ryzyku jest

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

.....

Niech $p_\theta(x)$ spełniają pewne warunki regularności.

Twierdzenie 7.2 *Jeżeli X_1, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości $p_\theta(x)$, to równanie wiarygodności*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [p_\theta(x_1) \cdots p_\theta(x_n)] = 0$$

ma rozwiązanie $\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$ takie, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0} \left\{ \left| \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta_0 \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

oraz

$$(*) \quad \sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta_0 \right) \rightarrow N \left(0, \frac{1}{I_\theta} \right).$$

■

Definicja 7.4 Estymator $\hat{\theta}_n$ spełniający warunek (*) nazywamy *asymptotycznie efektywnym*. \square

Przykład . Estymujemy parametr θ jednoparametrowej rodziny wykładniczej

$$p_{\theta}(x) = \exp\{\theta T(x) - b(\theta)\}$$

Wiarogodność próby

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n T(x_i) - nb(\theta) \right\}$$

$\hat{\theta}_n = ENW[\theta]$ istnieje i jest rozwiązaniem równania

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(x_i) = b'(\theta)$$

Ponadto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0} \left\{ \left| \hat{\theta}_n - \theta_0 \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \rightarrow N \left(0, \frac{1}{I_{\theta} = D_{\theta}^2 T} \right).$$

.....

Przykład . Model statystyczny

$$(\mathbb{R}, \{P_{\mu, \sigma^2} : (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\})$$

$$p_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - \mu)^2 \right\} \\ + \frac{\varepsilon}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

Wiarogodność próby

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{\mu, \sigma^2}(x_i)$$

Dla każdego $M > 0$ istnieją (μ, σ) takie, że

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) > M$$

.....

Przykład . Model statystyczny

$$\left(\mathbb{R}, \left\{ U \left(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2} \right) : \theta \in \mathbb{R} \right\} \right)$$

$$p_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \theta - \frac{1}{2} \leq x_1, \dots, x_n \leq \theta + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wiarogodność próby

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x_{n:n} - \frac{1}{2} \leq \theta \leq x_{1:n} + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Każda liczba z przedziału $\left[X_{n:n} - \frac{1}{2}, X_{1:n} + \frac{1}{2} \right]$ jest $ENW[\theta]$.

.....

Przykład . Model statystyczny

$$(\mathbb{R}_+, \{P_\theta : \theta \in \mathbb{R}_+\})$$

$$p_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \exp \{-x^\theta\}$$

Logarytm wiarygodności próby

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n) = \\ n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \exp \{\theta \log x_i\} \end{aligned}$$

Pochodna

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \log x_i \exp \{\theta \log x_i\}$$

Istnieje $ENW[\theta]$

.....