Estymacja przedziałowa

Przykład wstępny. Model gaussowski ze znaną wariancją

$$(\mathbb{R}, \{N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}\})$$

Zadanie polega na oszacowaniu wartości średniej μ.

Jakie wartości obserwacji X są „wysoce prawdopodobne” dla różnych μ?
Niech „wysoce prawdopodobne” wynosi 0.9. Szukamy takich $a(\mu)$ oraz $b(\mu)$, że

$$P_\mu\{X \in (a(\mu), b(\mu))\} = 0.9, \forall\mu \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie

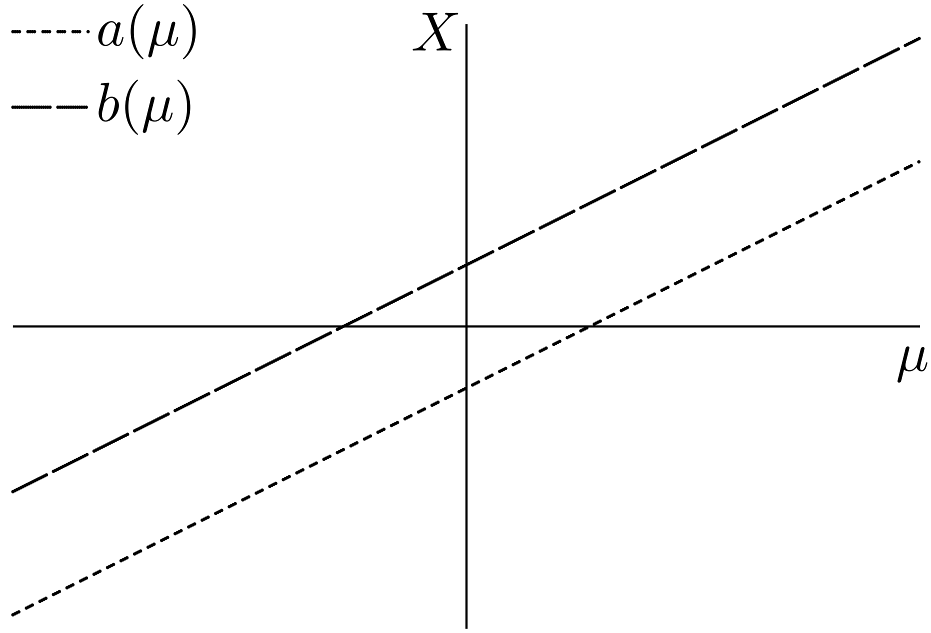
$$P_\mu\{X \in (a(\mu), b(\mu))\} = \Phi\left(\frac{b(\mu) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a(\mu) - \mu}{\sigma}\right)$$

Niech z_{α_1} oraz z_{α_2} będą takie, że

$$\Phi(z_{\alpha_2}) - \Phi(z_{\alpha_1}) = 0.9$$

$$b(\mu) = \mu + \sigma z_{\alpha_2},\ a(\mu) = \mu + \sigma z_{\alpha_1}$$

$$b(\mu) - a(\mu) = \min! \Rightarrow z_{\alpha_2} \overset{?}{=} -z_{\alpha_1} = z_{0.95}$$



$$X \in (\mu + \sigma z_{\alpha_1},\ \mu + \sigma z_{\alpha_2})$$

$$\Downarrow$$

$$\mu \in (X - \sigma z_{\alpha_2},\ X - \sigma z_{\alpha_1})$$

Zatem

$$P_\mu\{X \in (a(\mu), b(\mu))\} = 0.9, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$P_\mu\{\mu \in (X - \sigma z_{\alpha_2},\ X - \sigma z_{\alpha_1})\} = 0.9, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

. . . .

Definicja 9.1 Przedział $(\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X))$ taki, że

$$P_\theta\{\theta \in (\underline{\theta}(X),\ \overline{\theta}(X))\} = 1 - \alpha,\ \forall \theta \in \Theta$$

nazywamy **przedziałem ufności** na **poziomie ufności** $1 - \alpha$. $\Box$

Definicja 9.2 Zbiór $S_X \subset \Theta$ taki, że

$$P\{\theta \in S_X\} = 1 - \alpha,\ \forall \theta \in \Theta$$

nazywamy **obszarem ufności** na **poziomie ufności** $1 - \alpha$. $\Box$

Konstrukcja obszaru ufności

1. W przestrzeni $\mathcal{X} \times \Theta$ wyznaczyć taki zbiór S, że dla każdego θ

$$P_\theta\{(\mathcal{X} \times \{\theta\}) \cap S\} = 1 - \alpha$$

Wówczas dla danego $x \in \mathcal{X}$ zbiór

$$(\{x\} \times \Theta) \cap S$$

jest zbiorem ufności na poziomie ufności $1 - \alpha$

2. Skonstruować taką funkcję $t(x, \theta)$, że przy wartości parametru θ jej rozkład nie zależy od θ oraz (jeżeli $\Theta \subset \mathbb{R}$) jest ona monotoniczną funkcją θ. Taka funkcja nazywa się **funkcją centralną**. Wówczas można wyznaczyć takie dwie liczby, że

$$P_\theta\{t_1 < t(x, \theta) < t_2\} = 1 - \alpha$$

Ze względu na monotoniczność funkcji centralnej

$$t_1 < t(x, \theta) < t_2 \Leftrightarrow \underline{\theta}(X) < \theta < \overline{\theta}(X)$$

Dodatkowe kryteria

1. Jak najmniejszy zbiór ufności. Jeżeli $\Theta \subset \mathbb{R}$ oraz $t(x, \theta)$ jest funkcją centralną, to

$$\overline{\theta}(X) - \underline{\theta}(X) = \min!$$

2. Zbiór ufności o zadanej wielkości. Jeżeli $\Theta \subset \mathbb{R}$, $t(x, \theta)$ jest funkcją centralną oraz $d > 0$, to

$$\overline{\theta}(X) - \underline{\theta}(X) < d$$

Przykład (Model dwumianowy).

$$\left(\{0,1,\ldots,n\},\{B\left(n,\theta\right),\ \theta\in[0,1]\}\right)$$

Zaobserwowano X sukcesów.
Skonstruować przedział ufności $(\theta_1(X),\theta_2(X))$ dla θ na poziomie ufności 0.95

$$P_\theta\{\theta_1(X)<\theta<\theta_2(X)\}=0.95,\quad \forall\theta\in[0,1]$$

$\theta_1(X)$, $\theta_2(X)$ są takie, że

$$\binom{n}{X}\theta_1^X(1-\theta_1)^{n-X}=\gamma_1(=0.025)$$

$$\binom{n}{X}\theta_2^X(1-\theta_2)^{n-X}=\gamma_2(=0.975)$$

$$\gamma_2-\gamma_1=0.95$$

Rozwiązanie numeryczne!

. . . .

Przykład (Model gaussowski).
Przedział ufności dla μ

Model dla próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Znane fakty:
1. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
2. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$
3. $\bar{X}$ oraz $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ są niezależne
4. Jeżeli $\xi \sim N(0,1)$, $\eta \sim \chi^2_v$, ξ i η są niezależne, to $t = \xi/\sqrt{\eta/v} \sim t_v$.

Funkcja

$$t_{n-1} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$$

jest funkcją centralną.

Niech t_1, t_2 będą takimi liczbami, że

$$P\{t_1 < t_{n-1} < t_2\} = 1 - \alpha$$

Przedział ufności dla μ

$$\left(\bar{X} - t_2 \frac{S}{\sqrt{n}};\ \bar{X} - t_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Przedział jest najkrótszy, jeżeli $t_1 = -t_2$, czyli wybieramy taką liczbę $t(\alpha; n-1)$, że

$$P\{|t_{n-1}| < t(\alpha; n-1)\} = 1 - \alpha$$

Przedział ufności dla μ

$$\left(\bar{X} - t(\alpha; n-1) \frac{S}{\sqrt{n}};\ \bar{X} + t(\alpha; n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

. . . .

Przykład (Model gaussowski).
Przedział ufności dla σ^2

Model dla próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\left(\mathbb{R}^n, \left\{N\left(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n\right),\ \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\right\}\right)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Funkcja

$$\chi^2_{n-1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

jest funkcją centralną.

Niech c_1, c_2 będą takimi liczbami, że

$$P\{c_1 < \chi^2_{n-1} < c_2\} = 1 - \alpha$$

Przedział ufności dla σ^2

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{c_2};\ \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{c_1}\right)$$

1. Taki wybór granic, że

$$P\{\chi^2_{n-1} < c_1\} = \alpha/2 \text{ oraz } P\{\chi^2_{n-1} > c_2\} = \alpha/2$$

Oznaczenia

$$c_1 = \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right);\ c_2 = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right)$$

2. Przedział jest najkrótszy, tzn. $\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} = \min!$ ($f_{n-1}(x)$ oznacza gęstość rozkładu)

$$\int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1 - \alpha$$

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} = \min!$$

Rozwiązanie

$$\int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1 - \alpha$$

$$c_2^2 f_{n-1}(c_2) = c_1^2 f_{n-1}(c_1)$$

. . . .