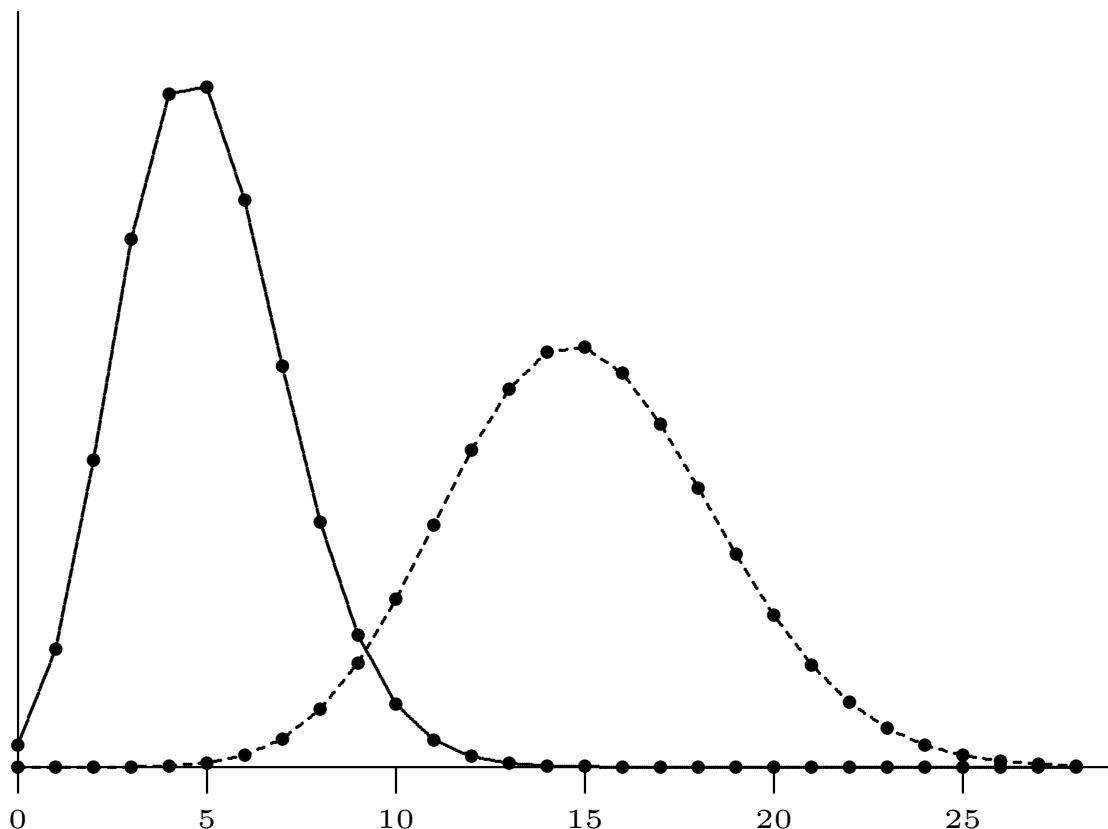


Weryfikacja hipotez statystycznych

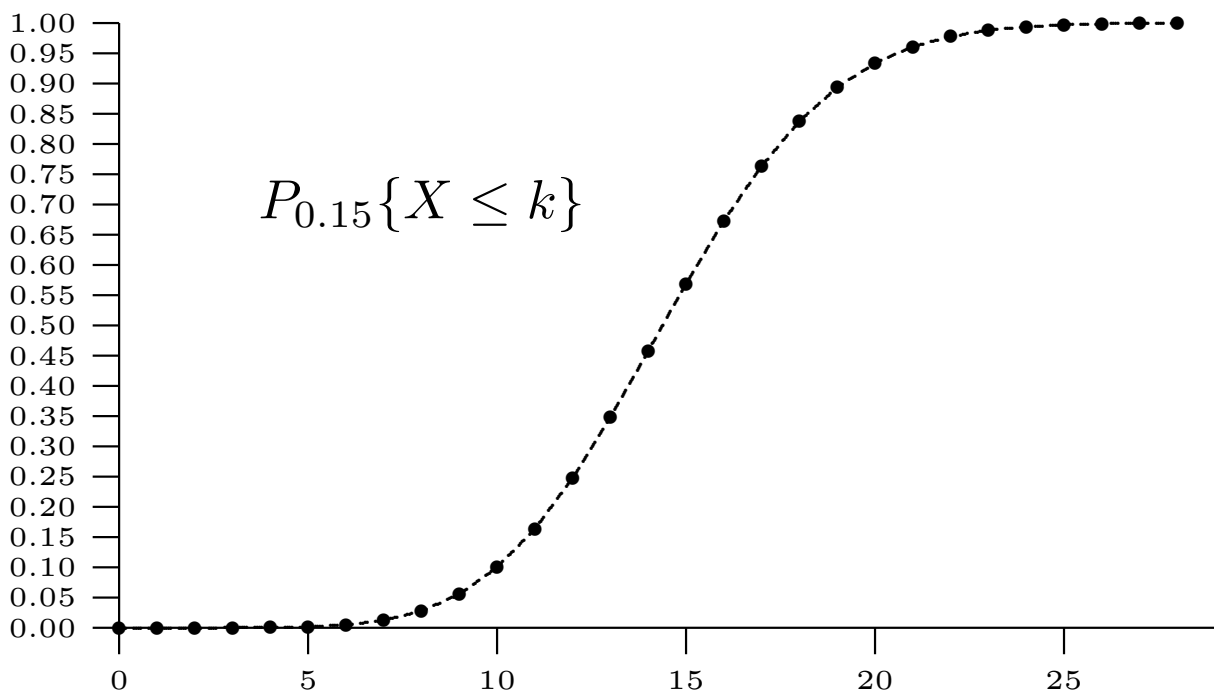
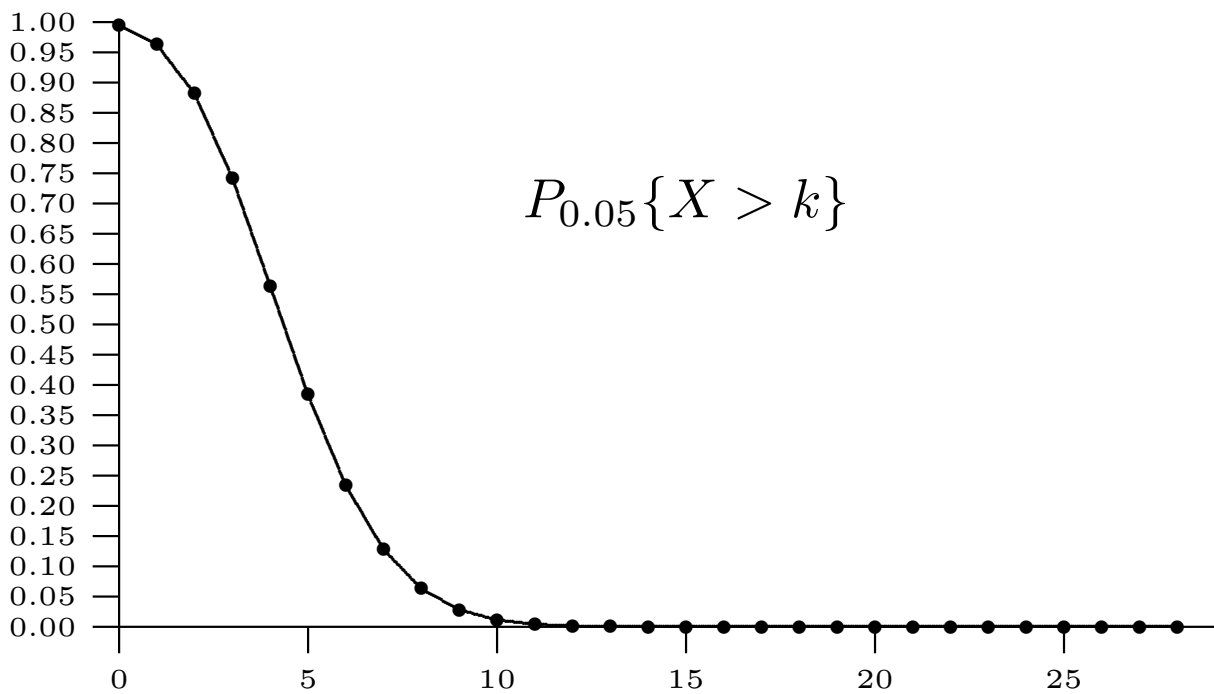
Przykład (wstępny). Producent twierdzi, że wadliwość produkcji wynosi 5%. My podejrzewamy, że rzeczywista wadliwość produkcji wynosi 15%. Pobieramy próbę stuelementową i zliczamy ilość X sztuk wadliwych. Model statystyczny

$$\{\{0, 1, \dots, 100\}, \{B(100, \theta), \theta \in \Theta = \{0.05, 0.15\}\}\}$$



Jeżeli $X \leq k$, to uznać $\theta = 0.05$

Jeżeli $X > k$, to uznać $\theta = 0.15$



Model statystyczny:

$$(\mathcal{X}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$$

Hipoteza statystyczna: podzbiór Θ_0 zbioru Θ .

Θ_0 nazywamy **hipotezą zerową**

$\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ nazywamy **hipotezą alternatywną**

Jeżeli zbiór Θ_0 jest jednoelementowy, to mówimy o hipotezie **prostej**, w przeciwnym przypadku mówimy o hipotezie **złożonej**.

Zapis klasyczny

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Test statystyczny: procedura statystyczna, w wyniku której podejmujemy jedną z dwóch decyzji:

odrzuć hipotezę zerową H_0

lub

nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej H_0 .

Formalnie: test hipotezy H_0 utożsamiamy z funkcją $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{odrzuć } H_0 \\ 0 & \text{nie odrzucać } H_0 \end{cases}$$

Test zrandomizowany: funkcja $\phi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$

$$\phi(x) \begin{cases} = 1 & \text{odrzuć } H_0 \\ \in (0, 1) & \text{na podstawie niezależnego od } X \\ & \text{mechanizmu losowego odrzuć } H_0 \\ & \text{z prawdopodobieństwem } \phi(x) \\ = 0 & \text{nie odrzucać } H_0 \end{cases}$$

Obszar krytyczny: $\{x \in \mathcal{X} : \phi(x) = 1\}$

Błąd I rodzaju: błąd polegający na odrzuceniu hipotezy zerowej H_0 , gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa.

Poziom istotności. Niech $\alpha \in (0, 1)$. Test ϕ jest na poziomie istotności α , jeżeli

$$E_{\theta}\phi(X) = P_{\theta}\{\phi(X) = 1\} \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0$$

Rozmiar testu:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_{\theta}\phi(X) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_{\theta}\{\phi(X) = 1\}$$

Błąd II rodzaju: błąd polegający na nieodrzućeniu hipotezy zerowej H_0 , gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa.

Moc testu:

$$\Theta_1 \in \theta \rightarrow E_{\theta}\phi(X) = P_{\theta}\{\phi(X) = 1\}$$

Twierdzenie 10.1 (*lemat Neymana–Pearsona*)

Niech P_{θ_0} oraz P_{θ_1} będą rozkładami prawdopodobieństwa o gęstościach f_0 i f_1 . Niech $\alpha \in (0, 1)$ będzie ustaloną liczbą

a. (Istnienie testu) Istnieją takie stałe t i γ , że

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } f_1(x) > t f_0(x) \\ \gamma, & \text{gdy } f_1(x) = t f_0(x) \\ 0, & \text{gdy } f_1(x) < t f_0(x) \end{cases}$$

jest testem hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$ przeciwko $H_1 : \theta = \theta_1$ na poziomie istotności α , tzn.

$$(*) \quad E_{\theta_0} \phi(X) = \alpha$$

b. (Dostateczność) Jeżeli test ϕ spełnia warunek $(*)$ i dla pewnego t warunek

$$(**) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } f_1(x) > t f_0(x) \\ 0, & \text{gdy } f_1(x) < t f_0(x) \end{cases}$$

to ϕ jest testem najmocniejszym na poziomie istotności α

c. (Konieczność) Jeżeli ϕ jest testem najmocniejszym na poziomie istotności α , to spełnia on warunek $(**)$ ■

Przykład (Model dwumianowy).

Niech $\theta_0 < \theta_1 \in (0, 1)$. Model statystyczny

$$\{\{0, 1, \dots, n\}, \{B(n, \theta), \theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}\}\}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

$$f_0(x) = \binom{n}{x} \theta_0^x (1 - \theta_0)^{n-x}$$

$$f_1(x) = \binom{n}{x} \theta_1^x (1 - \theta_1)^{n-x}$$

Konstrukcja testu $\phi(x)$

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > t \Leftrightarrow \left[\frac{\theta_1(1 - \theta_0)}{\theta_0(1 - \theta_1)} \right]^x > t \left[\frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_1} \right]^n$$

Obszar krytyczny: $\{x > k\}$

Stała k dobrana jest tak, że

$$E_{\theta_0} \phi(X) = P_{\theta_0} \{X > k\} \leq \alpha$$

Niech $n = 100$, $\theta_0 = 0.05$, $\theta_1 = 0.15$, $\alpha = 0.05$

k	7	8	9	10	11
$P_{0.05}\{x > k\}$	0.12796	0.06309	0.02819	0.01147	0.00427
$P_{0.05}\{x = k\}$	0.10603	0.06487	0.03490	0.01672	0.00720

Test niezrandomizowany

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 9, \\ 0, & \text{jeżeli } x \leq 9. \end{cases}$$

Rozmiar testu: $P_{0.05}\{x > 9\} = 0.02819$

Błąd II rodzaju: $P_{0.15}\{x \leq 9\} = 0.05509$

Test zrandomizowany

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 9, \\ 0.62495, & \text{jeżeli } x = 9 \\ 0, & \text{jeżeli } x < 9. \end{cases}$$

Rozmiar testu

$$\begin{aligned} & P_{0.05}\{x > 9\} + 0.62495 \cdot P_{0.05}\{x = 9\} \\ & = 0.02819 + 0.62495 \cdot 0.03490 = 0.05 \end{aligned}$$

.....

Przykład . Niech $a, b > 1$. Model statystyczny

$$\{(0, 1), \{U(0, 1), B(a, b)\}\}$$

$$H_0 : U(0, 1) \quad H_1 : B(a, b)$$

$$f_0(x) = 1 \cdot \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

$$f_1(x) \propto x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

Konstrukcja testu $\phi(x)$

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > t \Leftrightarrow x^{a-1}(1-x)^{b-1} > t$$

Obszar krytyczny: $\{x_0 < x < x_1\}$

Liczby x_0, x_1 dobrane są tak, że

$$E_{\theta_0} \phi(X) = P_{U(0,1)}\{x_0 < X < x_1\} \leq \alpha$$

$$x_0^{a-1}(1-x_0)^{b-1} = x_1^{a-1}(1-x_1)^{b-1}$$

Ponieważ $x_1 = x_0 + \alpha$, więc

$$\left[\frac{x_0 + \alpha}{x_0} \right]^{a-1} \left[\frac{1 - x_0 - \alpha}{1 - x_0} \right]^{b-1} = 1$$

a	b	x_0	x_1
2	2	0.47500	0.52500
2	3	0.30865	0.35865
2	4	0.22556	0.27556
3	2	0.64135	0.69135
3	3	0.47500	0.52500
3	4	0.37517	0.42517
4	2	0.72444	0.77444
4	3	0.57483	0.62483
4	4	0.47500	0.52500

.....

Hipotezy złożone

Model statystyczny:

$$(\mathcal{X}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

H_0 i/lub H_1 złożone

Iloraz wiarygodności

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} f_\theta(x)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x)} \quad \text{lub} \quad \lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} f_\theta(x)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x)}$$

Test

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \lambda(x) > t \\ \gamma, & \text{gdy } \lambda(x) = t \\ 0, & \text{gdy } \lambda(x) < t \end{cases}$$

Dobór stałej t

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \phi(X) \leq \alpha$$

Przykład (Model dumianowy). Niech $\theta_0 \in (0, 1)$.
Model statystyczny

$$\{\{0, 1, \dots, n\}, \{B(n, \theta), \theta \in \Theta = (0, 1)\}\}$$

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

$$f_\theta(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

Ponieważ

$$\sup_{\theta \in (0,1)} f_\theta(x) = f_{\frac{x}{n}}(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}$$

więc

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_\theta(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \leq \theta_0, \\ \binom{n}{x} \theta_0^x (1 - \theta_0)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0, \end{cases}$$

oraz

$$\sup_{\theta \in \Theta_1} f_\theta(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta_0^x (1 - \theta_0)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \leq \theta_0, \\ \binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0. \end{cases}$$

Zatem

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} f_{\theta}(x)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(x)}$$
$$= \begin{cases} \frac{\binom{n}{x} \theta_0^x (1 - \theta_0)^{n-x}}{\binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} \leq \theta_0, \\ \frac{\binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x}}{\binom{n}{x} \theta_0^x (1 - \theta_0)^{n-x}}, & \text{jeżeli } \frac{x}{n} > \theta_0. \end{cases}$$

$\lambda(x)$ jest rosnąca ze względu na x

$$\lambda(x) > t \Leftrightarrow x > k$$

Dobór stałej k

$$\sup_{\theta \leq \theta_0} P_{\theta}\{X > k\} \stackrel{?}{=} P_{\theta_0}\{X > k\} \leq \alpha$$

.....

Przykład (Model gaussowski). Niech $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
 Model dla próby $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$:

$$(\mathbb{R}^n, \{N(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\})$$

$$\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad \Theta_0 = \{\mu_0\} \times \mathbb{R}_+ \quad \Theta_1 = (\mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}) \times \mathbb{R}_+$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$f_{\mu, \sigma}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

Niech

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$$

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\mu, \sigma}(x) \stackrel{?}{=} f_{\mu_0, \tilde{\sigma}}(x) \stackrel{?}{=} \left(\frac{1}{\tilde{\sigma} \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} f_{\mu, \sigma}(x) \stackrel{?}{=} f_{\bar{x}, \hat{\sigma}}(x) \stackrel{?}{=} \left(\frac{1}{\hat{\sigma} \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}$$

Iloraz wiarygodności

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} f_{\mu, \sigma}(x)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\mu, \sigma}(x)} = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}} \right)^n$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu_0)^2 \\ &\stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2 \end{aligned}$$

więc

$$\lambda(x) = \left(1 + \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)^{\frac{n}{2}}$$

Test

$$\phi(x) = 1 \Leftrightarrow \lambda(x) > t \Leftrightarrow \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} > t'$$

Dobór stałej t'

$$E_{H_0} \phi(X) = \alpha$$

a. jeżeli H_0 jest prawdziwa, to

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{czyli} \quad \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$$

b. dla wszystkich $\theta \in \Theta$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

c. \bar{X} oraz $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ są niezależne
Jeżeli hipoteza H_0 jest prawdziwa, to

$$\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sim F_{1, n-1}$$

H_0 jest odrzucana na poziomie istotności α , jeżeli

$$(*) \quad \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} > F(\alpha; 1, n-1)$$

Ponieważ $t_v = \sqrt{F_{1,v}}$, więc (*) jest równoważne

$$(\clubsuit) \quad \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S} \sqrt{n} > t(\alpha; n-1)$$

Test (\clubsuit) nazywa się **testem Studenta**

.....

Przykład (Model gaussowski). Wariancja σ^2 jest znana. Niech $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbb{R}^n, \{N(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n), \theta = \mu \in \mathbb{R}\})$$

$$\Theta = \mathbb{R} \quad \Theta_0 = (-\infty, \mu_0) \quad \Theta_1 = (\mu_0, \infty)$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

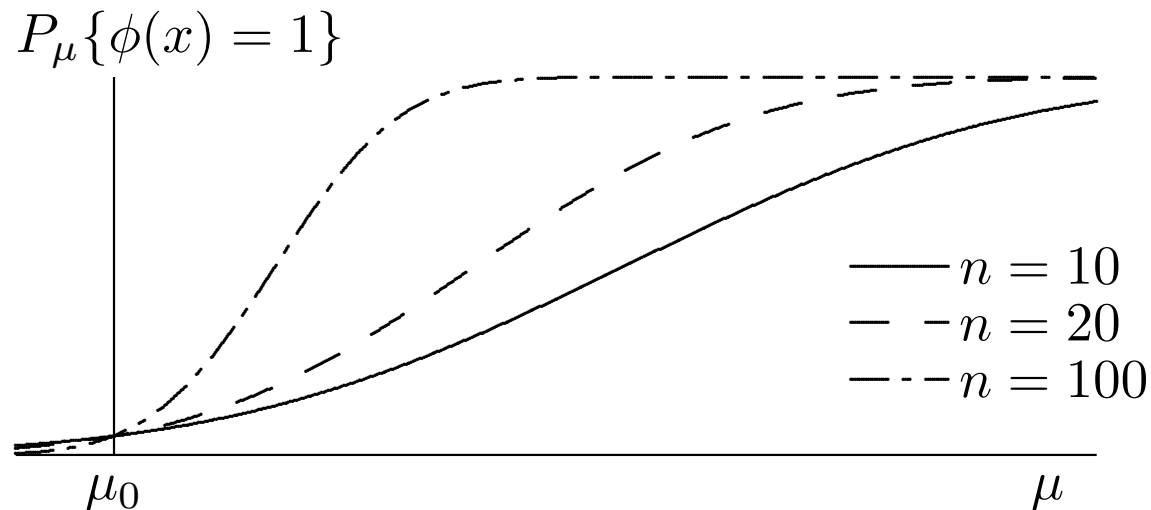
Stosując technikę poprzedniego przykładu otrzymujemy test o obszarze krytycznym

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > u_{1-\alpha}$$

Moc testu. Niech $\mu > \mu_0$. Prawdopodobieństwo odrzucenia H_0

$$\begin{aligned} P_\mu \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > u_{1-\alpha} \right\} &= \\ P_\mu \left\{ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} > u_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right\} &= \\ 1 - \Phi \left(u_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) & \end{aligned}$$

Moc testu jest zależna od $(\mu - \mu_0)/\sigma$



Liczność próby. Niech $(\mu - \mu_0)/\sigma = x_0$ będzie daną liczbą. Powiedzmy, że interesuje nas osiągnięcie dla tej wartości mocy co najmniej γ . Szukamy takiego n , że

$$1 - \Phi(u_{1-\alpha} - x_0\sqrt{n}) \geq \gamma$$

Rozwiązanie:

$$u_{1-\alpha} - x_0\sqrt{n} \leq u_{1-\gamma}$$

Stąd

$$n \geq \left[\frac{u_{1-\alpha} - u_{1-\gamma}}{x_0} \right]^2$$

x_0	γ ($\alpha=0.05$)							
	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.01	48987	55003	61720	69403	78488	89783	105073	129946
0.05	1959	2200	2468	2776	3139	3591	4202	5197
0.10	489	550	617	694	784	897	1050	1299
0.15	217	244	274	308	348	399	466	577
0.20	122	137	154	173	196	224	262	324
0.25	78	88	98	111	125	143	168	207
0.30	54	61	68	77	87	99	116	144
0.35	39	44	50	56	64	73	85	106
0.40	30	34	38	43	49	56	65	81
0.45	24	27	30	34	38	44	51	64
0.50	19	22	24	27	31	35	42	51
0.55	16	18	20	22	25	29	34	42
0.60	13	15	17	19	21	24	29	36
0.65	11	13	14	16	18	21	24	30
0.70	9	11	12	14	16	18	21	26
0.75	8	9	10	12	13	15	18	23
0.80	7	8	9	10	12	14	16	20
0.85	6	7	8	9	10	12	14	17
0.90	6	6	7	8	9	11	12	16
0.95	5	6	6	7	8	9	11	14
1.00	4	5	6	6	7	8	10	12

.....

Wartość p-value

Przykład (Model gaussowski). Wariancja σ^2 jest znana. Niech $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbb{R}^n, \{N(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n), \theta = \mu \in \mathbb{R}\})$$

$$\Theta = \mathbb{R} \quad \Theta_0 = \{\mu_0\} \quad \Theta_1 = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Test oparty na statystyce

$$Z(X) = n \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \right)^2$$

Duże wartości Z przemawiają przeciwko H_0

Jeżeli H_0 jest prawdziwa, to $Z(X)$ ma rozkład chi-kwadrat z jednym stopniem swobody.

Niech $Z(x)$ będzie wartością statystyki Z zaobserwowaną w próbie. Liczbę

$$p = P\{\chi_1^2 > Z(x)\}$$

nazywamy p -value

.....