

# Elementy teorii podejmowania decyzji

*Przykład (wstępny).* Kupujemy dziesięć używanych samolotów. Pewna nieznaną ich ilość  $\theta$  może latać 1000 godzin bez naprawy i każdy z nich daje zysk 1000z. Każdy z pozostałych będzie wymagał naprawy co da stratę w wysokości 1000q. Przed podjęciem decyzji za cenę 1000r można na 1000 godzin wypożyczyć jeden z samolotów i decyzję uzależnić od jego zachowania. Przeanalizować problem i wybrać najlepsze postępowanie.

Decyzje:

$d_1$  = kupić samoloty

$d_2$  = nie kupować samolotów

Bierzemy samolot na próbę:

$x_1$ (wynik próby OK)	$x_2$ (wynik próby nie OK)
$P_\theta(x_1) = \theta/10$	$P_\theta(x_2) = 1 - \theta/10$

## Model statystyczny

$$\{\{0, 1\}, \{D(\theta/10), \theta \in \Theta = \{0, 1, \dots, 10\}\}\}$$

## Funkcja straty

$$L(d_1, \theta) = r - \theta z + (10 - \theta)q$$

$$L(d_2, \theta) = r \text{ dla wszystkich } \theta$$

## Postępowania (reguły decyzyjne)

	$x_1$	$x_2$
$\delta_1$	nie kupować	nie kupować
$\delta_2$	kupić	kupić
$\delta_3$	kupić	nie kupować
$\delta_4$	nie kupować	kupić

Wybrać najlepszą regułę decyzyjną!

.....

## Model statystyczny

$$\{\mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\}\}$$

1. Zbiór obserwacji  $\mathcal{X}$
2. Zbiór stanów natury  $\Theta$
3. Zbiór decyzji  $\mathcal{D}$
4. Funkcja straty  $L(d, \theta) : \mathcal{D} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$
5. Reguła decyzyjna  $\delta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$
6. Ryzyko reguły  $\delta: R_\delta(\theta) = E_\theta\{L(\delta(X), \theta)\}$

### Zadanie:

znaleźć regułę  $\delta$  „optymalizującą” ryzyko

### Optymalizacja:

1. jednostajna minimalizacja ryzyka
2. zasada minimaksu
3. reguła Bayesa

## Estymacja

1. Zbiór decyzji  $\mathcal{D} = \Theta = \mathbb{R}$
2. Funkcja straty  $L(d, \theta) = (d - \theta)^2$
3. Reguła decyzyjna  $\delta$ : estymator parametru  $\theta$
4. Ryzyko reguły  $\delta$ : błąd średniokwadratowy

Jeżeli ograniczymy się do takich reguł  $\delta$ , że

$$E_{\theta}\delta(X) = \theta, \quad \forall \theta \in \Theta$$

to reguła **jednostajnie minimalizująca ryzyko** jest ENMW.

## Weryfikacja hipotez

1. Zbiór decyzji

$$\mathcal{D} = \{d_1 = \{\theta \in \Theta_0\}, d_2 = \{\theta \notin \Theta_0\}\}$$

2. Funkcja straty  $L(d, \theta)$

	$\theta \in \Theta_0$	$\theta \notin \Theta_0$
$d_1$	0	1
$d_2$	1	0

3. Reguła decyzyjna  $\delta$ : test  $\phi$

4. Ryzyko reguły  $\delta$ : prawdopodobieństwo błędnego wnioskowania

Jeżeli ograniczymy się do takich reguł  $\delta$ , że

$$E_\theta \delta(X) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0$$

to reguła **jednostajnie minimalizująca ryzyko** jest testem jednostajnie najmocniejszym.

# Optymalizacja

## 1. Jednostajna minimalizacja ryzyka

Znaleźć taką regułę  $\delta$ , że jeżeli  $\delta'$  jest jakąkolwiek inną regułą, to

$$R_\delta(\theta) \leq R_{\delta'}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

## 2. Zasada minimaksu

Znaleźć taką regułę  $\delta$ , że jeżeli  $\delta'$  jest jakąkolwiek inną regułą, to

$$\max_{\theta} R_\delta(\theta) \leq \max_{\theta} R_{\delta'}(\theta)$$

## 3. Zasada Bayesa

Znaleźć taką regułę  $\delta$ , że jeżeli  $\delta'$  jest jakąkolwiek inną regułą, to

$$\int_{\Theta} R_\delta(\theta) \Pi(d\theta) \leq \int_{\Theta} R_{\delta'}(\theta) \Pi(d\theta)$$

gdzie  $\Pi$  jest taką miarą na zbiorze  $\Theta$ , że  $\int_{\Theta} \Pi(d\theta) = 1$

**Przykład cd.** Ryzyko reguły decyzyjnej

$x_1$  : próba pozytywna

$x_2$  : próba negatywna

Reguła  $\delta_1$ :

$$\delta_1(x_1) = d_2 \quad \delta_1(x_2) = d_2$$

$$R_{\delta_1}(\theta) = r$$

Reguła  $\delta_2$ :

$$\delta_2(x_1) = d_1 \quad \delta_2(x_2) = d_1$$

$$R_{\delta_2}(\theta) = r - \theta z + (10 - \theta)q$$

Reguła  $\delta_3$ :

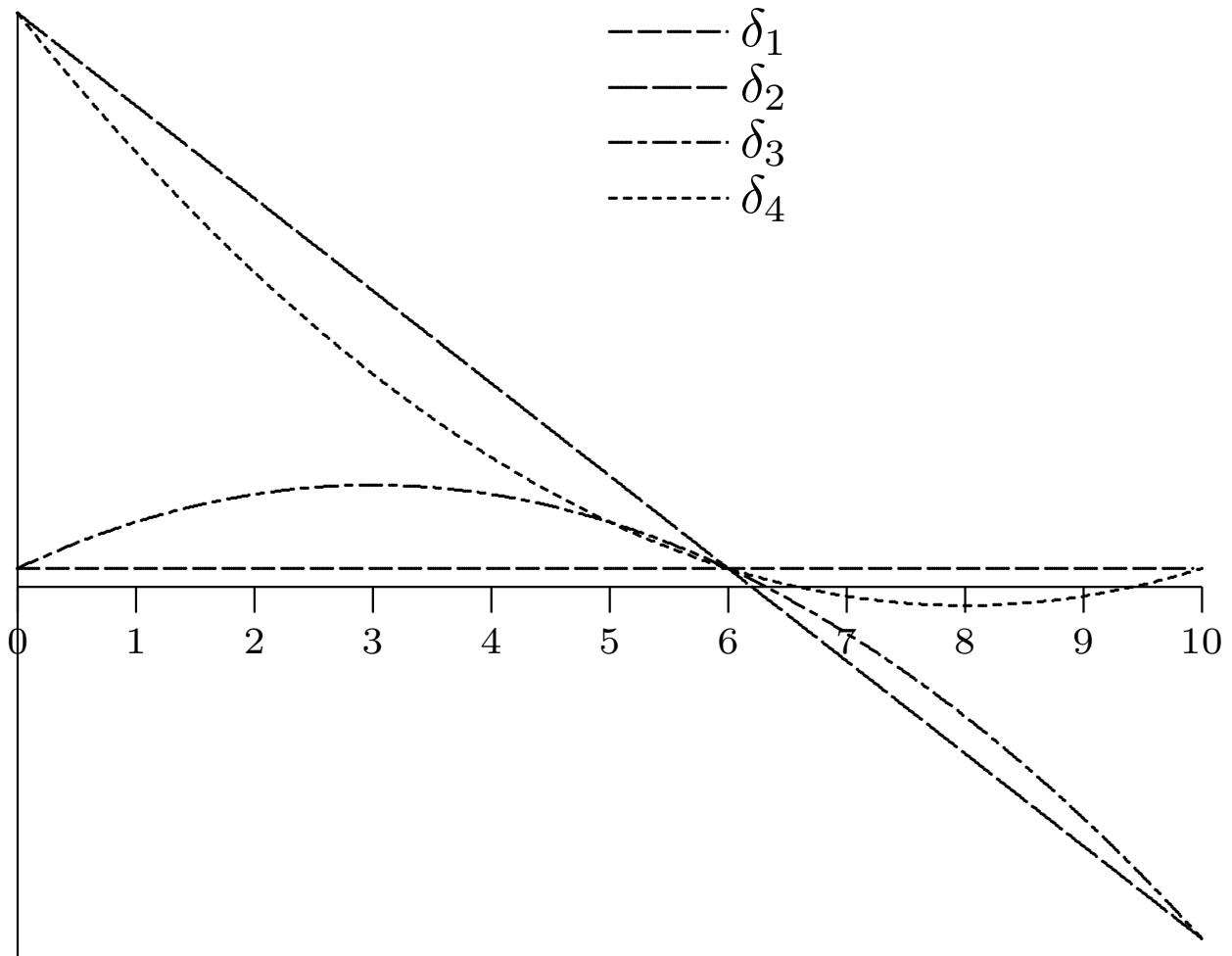
$$\delta_3(x_1) = d_1 \quad \delta_3(x_2) = d_2$$

$$R_{\delta_3}(\theta) = \frac{\theta}{10} \{r - \theta z + (10 - \theta)q\} + \left[1 - \frac{\theta}{10}\right] r$$

Reguła  $\delta_4$ :

$$\delta_4(x_1) = d_2 \quad \delta_4(x_2) = d_1$$

$$R_{\delta_4}(\theta) = \frac{\theta}{10} r + \left[1 - \frac{\theta}{10}\right] \{r - \theta z + (10 - \theta)q\}$$



### Zasada minimaksu

$$z = 0.2 \quad q = 0.3 \quad r = 0.1$$

$$\delta_1: \max_{\theta} R_{\delta_1}(\theta) = 0.1$$

$$\delta_2: \max_{\theta} R_{\delta_2}(\theta) = R_{\delta_2}(0) = 3.1$$

$$\delta_3: \max_{\theta} R_{\delta_3}(\theta) = R_{\delta_3}(3) = 0.55$$

$$\delta_4: \max_{\theta} R_{\delta_4}(\theta) = R_{\delta_4}(0) = 3.1$$

.....



## Zasada bayesowska

$$P\{\theta = i\} = p_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10$$

$$\text{Średnie ryzyko reguły } \delta = \sum_{i=0}^{10} R_{\delta}(\theta = i)p_i$$

$$P\{\theta = i\} = \frac{1}{11}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10$$

	<b>średnie ryzyko</b>		
	$z = 0.20$ $q = 0.30$ $r = 0.10$	$z = 0.20$ $q = 0.05$ $r = 0.10$	$z = 0.20$ $q = 0.50$ $r = 0.10$
$\delta_1$	0.10	0.100	0.10
$\delta_2$	0.60	-0.650	1.60
$\delta_3$	-0.15	-0.525	0.15
$\delta_4$	0.85	-0.025	1.55