Elementy teorii podejmowania decyzji

Przykład (wstępny). Kupujemy dziesięć używanych samolotów. Pewna nieznana ich ilość θ może latać 1000 godzin bez naprawy i każdy z nich daje zysk $1000z$. Każdy z pozostałych będzie wymagał naprawy co da stratę w wysokości $1000q$. Przed podjęciem decyzji za cenę $1000r$ można na 1000 godzin wypożyczyć jeden z samolotów i decyzję uzależnić od jego zachowania. Przeanalizować problem i wybrać najlepsze postępowanie.

Decyzje:

$$d_1 = \text{kupić samoloty}$$
$$d_2 = \text{nie kupować samolotów}$$

Bierzemy samolot na próbę:

x_1 (wynik próby OK)	x_2 (wynik próby nie OK)
$P_\theta(x_1) = \theta/10$	$P_\theta(x_2) = 1 - \theta/10$

Model statystyczny

$$\{\{0,1\},\{D(\theta/10),\theta\in\Theta=\{0,1,\ldots,10\}\}\}$$

Funkcja straty

$$L(d_1,\theta)=r-\theta z+(10-\theta)q$$
$$L(d_2,\theta)=r \text{ dla wszystkich } \theta$$

Postępowania (reguły decyzyjne)

	x_1	x_2
δ_1	nie kupować	nie kupować
δ_2	kupić	kupić
δ_3	kupić	nie kupować
δ_4	nie kupować	kupić

Wybrać najlepszą regułę decyzyjną!

. . . .

Model statystyczny

$$\{\mathcal{X}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\}\}$$

1. Zbiór obserwacji $\mathcal{X}$

2. Zbiór stanów natury Θ

3. Zbiór decyzji $\mathcal{D}$

4. Funkcja straty $L(d, \theta) : \mathcal{D} \times \Theta \to \mathbb{R}$

5. Reguła decyzyjna $\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$

6. Ryzyko reguły δ: $R_\delta(\theta) = E_\theta\{L(\delta(X), \theta)\}$

Zadanie:

znaleźć regułę δ „optymalizującą" ryzyko

Optymalizacja:

1. jednostajna minimalizacja ryzyka

2. zasada minimaksu

3. reguła Bayesa

Estymacja

1. Zbiór decyzji $\mathcal{D} = \Theta = \mathbb{R}$

2. Funkcja straty $L(d, \theta) = (d - \theta)^2$

3. Reguła decyzyjna δ: estymator parametru θ

4. Ryzyko reguły δ: błąd średniokwadratowy

Jeżeli ograniczymy się do takich reguł δ, że

$$E_\theta \delta(X) = \theta, \qquad \forall \theta \in \Theta$$

to reguła **jednostajnie minimalizująca ryzyko** jest ENMW.

Weryfikacja hipotez

1. Zbiór decyzji

$$\mathcal{D} = \{d_1 = \{\theta \in \Theta_0\}, d_2 = \{\theta \notin \Theta_0\}\}$$

2. Funkcja straty $L(d, \theta)$

	$\theta \in \Theta_0$	$\theta \notin \Theta_0$
d_1	0	1
d_2	1	0

3. Reguła decyzyjna δ: test ϕ

4. Ryzyko reguły δ: prawdopodobieństwo błędnego wnioskowania

Jeżeli ograniczymy się do takich reguł δ, że

$$E_\theta \delta(X) \le \alpha, \qquad \forall \theta \in \Theta_0$$

to reguła **jednostajnie minimalizująca ryzyko** jest testem jednostajnie najmocniejszym.

Optymalizacja

1. Jednostajna minimalizacja ryzyka

Znaleźć taką regułę δ, że jeżeli δ' jest jakąkolowiek inną regułą, to

$$R_\delta(\theta) \leq R_{\delta'}(\theta) \qquad \forall \theta \in \Theta$$

2. Zasada minimaksu

Znaleźć taką regułę δ, że jeżeli δ' jest jakąkolowiek inną regułą, to

$$\max_\theta R_\delta(\theta) \leq \max_\theta R_{\delta'}(\theta)$$

3. Zasada Bayesa

Znaleźć taką regułę δ, że jeżeli δ' jest jakąkolowiek inną regułą, to

$$\int_\Theta R_\delta(\theta)\Pi(d\theta) \leq \int_\Theta R_{\delta'}(\theta)\Pi(d\theta)$$

gdzie Π jest taką miarą na zbiorze Θ, że $\int_\Theta \Pi(d\theta) = 1$

Przykład cd. Ryzyko reguły decyzyjnej

$$\begin{aligned} x_1: &\quad \text{próba pozytywna} \\ x_2: &\quad \text{próba negatywna} \end{aligned}$$

Reguła δ_1:

$$\delta_1(x_1) = d_2 \qquad \delta_1(x_2) = d_2$$

$$R_{\delta_1}(\theta) = r$$

Reguła δ_2:

$$\delta_2(x_1) = d_1 \qquad \delta_2(x_2) = d_1$$

$$R_{\delta_2}(\theta) = r - \theta z + (10 - \theta)q$$

Reguła δ_3:

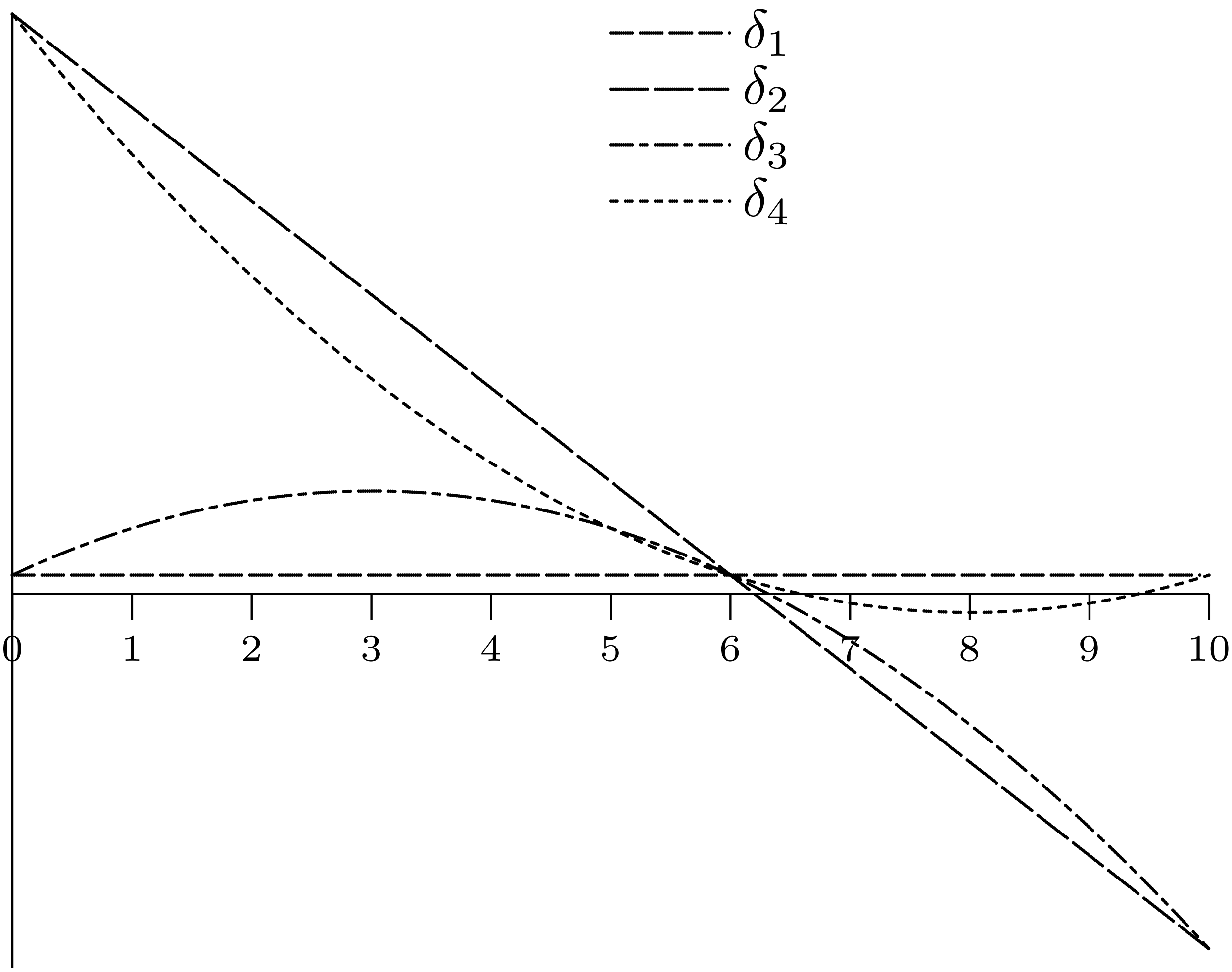
$$\delta_3(x_1) = d_1 \qquad \delta_3(x_2) = d_2$$

$$R_{\delta_3}(\theta) = \frac{\theta}{10}\{r - \theta z + (10 - \theta)q\} + \left[1 - \frac{\theta}{10}\right] r$$

Reguła δ_4:

$$\delta_4(x_1) = d_2 \qquad \delta_4(x_2) = d_1$$

$$R_{\delta_4}(\theta) = \frac{\theta}{10} r + \left[1 - \frac{\theta}{10}\right]\{r - \theta z + (10 - \theta)q\}$$



Zasada minimaksu

$$z = 0.2 \quad q = 0.3 \quad r = 0.1$$

$$\begin{aligned}
\delta_1: &\quad \max_\theta R_{\delta_1}(\theta) = 0.1 \\
\delta_2: &\quad \max_\theta R_{\delta_2}(\theta) = R_{\delta_2}(0) = 3.1 \\
\delta_3: &\quad \max_\theta R_{\delta_3}(\theta) = R_{\delta_3}(3) = 0.55 \\
\delta_4: &\quad \max_\theta R_{\delta_4}(\theta) = R_{\delta_4}(0) = 3.1
\end{aligned}$$

. . . .

Zasada bayesowska

$$P\{\theta = i\} = p_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

$$\text{Średnie ryzyko reguły } \delta = \sum_{i=0}^{10} R_\delta(\theta = i) p_i$$

$$P\{\theta = i\} = \frac{1}{11}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

	średnie ryzyko		
	$z = 0.20$ $q = 0.30$ $r = 0.10$	$z = 0.20$ $q = 0.05$ $r = 0.10$	$z = 0.20$ $q = 0.50$ $r = 0.10$
δ_1	0.10	0.100	0.10
δ_2	0.60	−0.650	1.60
δ_3	−0.15	−0.525	0.15
δ_4	0.85	−0.025	1.55