

Różne rozkłady prawdopodobieństwa

1. Rozkład dwupunktowy $D(p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład $D(p)$, jeżeli

$$P_p\{\xi = 1\} = p \text{ oraz } P_p\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

$$E\xi = p \quad D^2\xi = p(1 - p)$$

.....

2. Rozkład dwumianowy $B(n, p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład dwumianowy z parametrami (n, p) , jeżeli

$$P_{n,p}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

$$E\xi = np \quad D^2\xi = np(1 - p)$$

.....

a. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $D(p)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $B(n, p)$.

.....

3. Rozkład geometryczny $G(p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład geometryczny z parametrem p , jeżeli

$$P_p\{\xi = k\} = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E\xi = \frac{1 - p}{p} \quad D^2\xi = \frac{1 - p}{p^2}$$

.....

4. Rozkład ujemny dwumianowy $NB(r, p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r, p) , jeżeli

$$P_{r,p}\{\xi = k\} = \binom{r + k - 1}{k} p^r (1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E\xi = \frac{r(1 - p)}{p} \quad D^2\xi = \frac{r(1 - p)}{p^2}$$

.....

5. Rozkład Poissona $Po(\lambda)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład $Po(\lambda)$, jeżeli

$$P_\lambda\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$E\xi = \lambda \quad D^2\xi = \lambda$$

.....

6. Rozkład hipergeometryczny $H(N, n, M)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład hipergeometryczny z parametrami (N, n, M) ($0 \leq M \leq N$), jeżeli

$$P_{N,n,M}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

dla $k = \max\{0, n - N + M\}, \max\{0, n - N + M\} + 1, \dots, \min\{n, M\}$.

$$E\xi = \frac{nM}{N} \quad D^2\xi = \frac{N - n}{n - 1} \frac{nM}{N} \frac{N - M}{N}$$

.....

7. Rozkład jednostajny $U(a, b)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład jednostajny na przedziale (a, b) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jeżeli } x \in (a, b), \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

$$E\xi^k = \frac{1}{b-a} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad D^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

8. Rozkład trójkątny $Tr(a, b)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład trójkątny na przedziale (a, b) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} |a+b-2x|, & \text{jeżeli } x \in (a, b), \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

$$E\xi^k = \frac{4}{(b-a)^2(k+1)(k+2)} \left[a^{k+2} + b^{k+2} - 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+2} \right] \quad (k = 1, 2, \dots), \quad D^2\xi = \frac{(b-a)^2}{24}$$

a. Jeżeli ξ_1 oraz ξ_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $U(a, b)$, to $\xi = (\xi_1 + \xi_2)/2$ ma rozkład trójkątny na przedziale (a, b) .

9. Rozkład beta $\beta(a, b)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład beta z parametrami (a, b) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem ($\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

$$E\xi^k = \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)} = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}, \quad D^2\xi = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

10. Rozkład wykładniczy $E(\lambda)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład wykładniczy z parametrem λ , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$E\xi^k = \lambda^k, \quad D^2\xi = \lambda^2$$

11. Rozkład gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład gamma z parametrami (α, λ) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$E\xi^k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\lambda^k, \quad D^2\xi = \alpha\lambda^2$$

a. $\Gamma(1, \lambda) = E(\lambda)$.

12. Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład normalny z parametrami μ oraz σ^2 , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E\xi = \mu, \quad E(\xi - \mu)^{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2k - 1)\sigma^{2k}, \quad E(\xi - \mu)^{2k+1} = 0, \quad D^2\xi = \sigma^2.$$

13. Rozkład Cauchy'ego. Zmienna losowa ξ ma rozkład Cauchy'ego z parametrami (α, λ) , jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Zmienna losowa ξ nie ma wartości oczekiwanej.

14. Rozkład chi-kwadrat χ_v^2 . Zmienna losowa ξ ma rozkład chi-kwadrat z v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_v(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

$$E\xi^k = v(v+2) \cdots [v+2(k-1)], \quad D^2\xi = 2v.$$

a. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $N(0, 1)$, to zmienna losowa $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ma rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody.

b. $\chi_v^2 = \Gamma(v/2, 1/2)$.

15. Rozkład t (Studenta) t_v . Zmienna losowa ξ ma rozkład t z v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_v(x) = \frac{1}{B(1/2, v/2)\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{(1+x^2/v)^{(v+1)/2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E\xi^{2k-1} = 0, \quad E\xi^{2k} = \frac{v^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{v}{2} - k) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} (2k < v), \quad D^2\xi = \begin{cases} \frac{v}{v-2}, & v > 2, \\ \infty, & v \leq 2. \end{cases}$$

a. Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład $N(0, 1)$, zmienna losowa η ma rozkład chi-kwadrat z v stopniami swobody oraz zmienne te są niezależne, to zmienna losowa $t = \xi/\sqrt{\eta/v}$ ma rozkład t z v stopniami swobody.

16. Rozkład F (Snedecora) $F_{u,v}$. Zmienna losowa ξ ma rozkład F (Snedecora) z u oraz v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_{u,v}(x) = \frac{u^{u/2} v^{v/2} \Gamma(\frac{u+v}{2})}{\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} x^{u/2-1} (v+ux)^{-(u+v)/2}, \quad x > 0.$$

$$E\xi^k = \frac{\Gamma(\frac{v}{2} + k) \Gamma(\frac{v}{2} - k) v^k}{\Gamma(\frac{v}{2}) u^k \Gamma(\frac{v}{2})} (2k < v) \quad D^2\xi = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)} (v > 4)$$

a. Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład chi-kwadrat z u stopniami swobody, zmienna losowa η ma rozkład chi-kwadrat z v stopniami swobody i zmienne te są niezależne, to zmienna losowa $F = (\xi/u)/(\eta/v)$ ma rozkład F z (u, v) stopniami swobody.

b. Jeżeli $\xi \sim F_{2r, 2p}$, to $\frac{1}{1+\xi} \sim \beta(p, r)$.

c. Jeżeli $\xi \sim F_{1,v}$, to $\sqrt{\xi} \sim t_v$.

17. Rozkład z Fishera. Zmienna losowa ξ ma rozkład z Fishera z (r, s) stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{2r^{\frac{r}{2}} s^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right) e^{-rx}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) (s + re^{2x})^{\frac{r+s}{2}}}, \quad x \in R$$

$$E\xi = 0, \quad D^2\xi = \frac{1}{2} \frac{r+s}{rs}$$

a. Jeżeli $\xi \sim F_{r,s}$, to $\frac{1}{2} \ln \xi$ ma rozkład z Fishera z (r, s) stopniami swobody.

18. Rozkład wielomianowy. Wektor losowy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ma rozkład wielomianowy z parametrami (n, p_1, \dots, p_k) , jeżeli

$$P\{\xi = \mathbf{m}\} = P\{\xi_1 = m_1, \dots, \xi_k = m_k\} = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$$

gdzie $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$, $\sum_{i=1}^k m_i = n$, $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

$$E\xi = n(p_1, \dots, p_k), \quad Cov\xi_i\xi_j = -np_i p_j (i \neq j), \quad D^2\xi_i = np_i(1 - p_i).$$

a. Jeżeli $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$ są niezależnymi k -wymiarowymi wektorami losowymi o rozkładach wielomianowych z parametrami $(n_1, \mathbf{p}), \dots, (n_k, \mathbf{p})$, to $\xi = \sum \xi^{(i)}$ ma rozkład wielomianowy z parametrami $(\sum n_i, \mathbf{p})$.

b. Rozkład wielomianowy jest wielowymiarowym analogiem rozkładu dwumianowego.

19. Rozkład Dirichleta. Wektor losowy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ma rozkład Dirichleta z parametrami $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ($\alpha_i > 0$), jeżeli funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}, & \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 0, & \mathbf{x} \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in R^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_i > 0\}$.

$$E\xi = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad Cov\xi_i\xi_j = -\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_0^2(1 + \alpha_0)} (i \neq j), \quad D^2\xi_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \left(\alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \right).$$

a. Rozkład Dirichleta jest wielowymiarowym analogiem rozkładu beta.

20. Wielowymiarowy rozkład normalny $N_n(\mu, \Sigma)$. Wektor losowy $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]'$ ma n -wymiarowy rozkład normalny, jeżeli jego funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right].$$

$$E\mathbf{x} = \mu, \quad D^2\mathbf{x} = \Sigma$$

a. Jeżeli $\mathbf{x} \sim N_n(\theta, \Sigma)$, $\mathbf{A} - p \times n$ macierz stałych, to $\mathbf{Ax} \sim N_p(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$.

b. Jeżeli X_1, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o tej samej wariancji oraz \mathbf{T} jest macierzą ortogonalną, to elementy wektora losowego $\mathbf{T}\mathbf{x}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych.

c. Jeżeli \mathbf{x} ma n -wymiarowy rozkład normalny, to każda składowa ma jednowymiarowy rozkład normalny (twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.)

d. Wektor \mathbf{x} ma wielowymiarowy rozkład normalny wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}) \mathbf{a}'\mathbf{x}$ ma jednowymiarowy rozkład normalny.

e. Niech $\mathbf{x} \sim N_n(\theta, \Sigma)$. Zmienne losowe $\mathbf{a}'\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{b}'\mathbf{x}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{a}'\mathbf{b} = 0$.