Różne rozkłady prawdopodobieństwa

1. Rozkład dwupunktowy $D(p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład $D(p)$, jeżeli

$$P_p\{\xi = 0\} = p \text{ oraz } P_p\{\xi = 1\} = 1 - p.$$

$$E\xi = p \qquad D^2\xi = p(1-p)$$

. . . .

2. Rozkład dwumianowy $Bin(n,p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład dwumianowy z parametrami (n,p), jeżeli

$$P_{n,p}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$E\xi = np \qquad D^2\xi = np(1-p)$$

a. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $Bin(n_i, p)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $Bin(\sum_{i=1}^n n_i, p)$.
b. $D(p) = Bin(1,p)$.
c. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $D(p)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $B(n,p)$.

. . . .

3. Rozkład geometryczny $Ge(p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład geometryczny z parametrem p, jeżeli

$$P_p\{\xi = k\} = p(1-p)^k, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E\xi = \frac{1-p}{p} \qquad D^2\xi = \frac{1-p}{p^2}$$

. . . .

4. Rozkład ujemny dwumianowy $NB(r,p)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r,p), jeżeli

$$P_{r,p}\{\xi = k\} = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E\xi = \frac{r(1-p)}{p} \qquad D^2\xi = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

a. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $NB(r_i, p)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $NB(\sum_{i=1}^n r_i, p)$.
b. $Ge(p) = NB(1,p)$.
c. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $Ge(p)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $NB(n,p)$.

. . . .

5. Rozkład Poissona $Po(\lambda)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład $Po(\lambda)$, jeżeli

$$P_\lambda\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k = 0, 1, \ldots$$

$$E\xi = \lambda \qquad D^2\xi = \lambda$$

a. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $Po(\lambda_i)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $Po(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$.

. . . .

6. Rozkład hipergeometryczny $H(N,n,M)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład hipergeometryczny z parametrami (N,n,M) $(0 \le M \le N)$, jeżeli

$$P_{N,n,M}\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \ k = 0,1,\ldots,n.$$

$$E\xi = \frac{nM}{N} \qquad D^2\xi = \frac{N-n}{n-1}\frac{nM}{N}\frac{N-M}{N}$$

. . . .

7. Rozkład jednostajny $U(a,b)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład jednostajny na przedziale (a,b), jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jeżeli } x \in (a,b), \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

$$E\xi^k = \frac{1}{b-a}\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \quad (k = 1,2\ldots), \qquad D^2\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

. . . .

8. Rozkład trójkątny $Tr(a,b)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład trójkątny na przedziale (a,b), jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b-a} - \dfrac{2}{(b-a)^2}|a+b-2x|, & \text{jeżeli } x \in (a,b), \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

$$E\xi^k = \frac{4}{(b-a)^2(k+1)(k+2)}\left[a^{k+2} + b^{k+2} - 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+2}\right] \quad (k = 1,2\ldots), \qquad D^2\xi = \frac{(b-a)^2}{24}$$

a. Jeżeli ξ_1 oraz ξ_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $U(a,b)$, to $\xi = (\xi_1+\xi_2)/2$ ma rozkład trójkątny na przedziale (a,b).

. . . .

9. Funkcje specjalne.
a. Funkcja gamma: $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$.
b. $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla naturalnych n.
c. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
d. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
e. Funkcja beta: $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.
f. $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.

. . . .

10. Rozkład beta $Bet(a,b)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład beta z parametrami (a,b), jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$E\xi^k = \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)} = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}, \qquad D^2\xi = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

a. $Bet(1,1) = U(0,1)$.

. . . .

11. Rozkład wykładniczy $E(\lambda)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$E\xi^k = \lambda^k, \qquad D^2\xi = \lambda^2$$

....

12. Rozkład gamma $G(\alpha, \lambda)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład gamma z parametrami (α, λ), jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$E\xi^k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\lambda^k, \qquad D^2\xi = \alpha\lambda^2$$

a. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $G(\alpha_i, \lambda)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $G(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda)$.
b. $G(1, \lambda) = E(\lambda)$.
c. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $E(\lambda)$, to zmienna losowa $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ma rozkład $G(n, \lambda)$.

....

13. Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład normalny z parametrami μ oraz σ^2, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ -\infty < x < \infty.$$

$$E\xi = \mu, \quad E(\xi-\mu)^{2k} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot(2k-1)\sigma^{2k}, \quad E(\xi-\mu)^{2k+1} = 0, \quad D^2\xi = \sigma^2.$$

....

14. Rozkład Cauchy'ego. Zmienna losowa ξ ma rozkład Cauchy'ego z parametrami (α, λ), jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2}, \quad \infty < x < \infty.$$

a. Zmienna losowa ξ nie ma wartości oczekiwanej.
b. Jeżeli zmienne losowe ξ oraz η są niezależne o rozkładach $N(0,1)$, to zmienna losowa ξ/η ma rozkład Cauchy'ego z parametrami $(0,1)$.

....

15. Rozkład chi–kwadrat $\chi^2(v)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład chi–kwadrat z v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_v(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \ x > 0.$$

$$E\xi^k = v(v+2)\cdots[v+2(k-1)], \qquad D^2\xi = 2v.$$

a. Jeżeli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $N(0,1)$, to zmienna losowa $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ma rozkład chi–kwadrat z n stopniami swobody.
b. $\chi^2(v) = \Gamma(v/2, 2)$.

....

16. Rozkład t (Studenta) $t(v)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład t z v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_v(x) = \frac{1}{B(1/2, v/2)\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{(1 + x^2/v)^{(v+1)/2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E\xi^{2k-1} = 0, \quad E\xi^{2k} = \frac{v^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2} - k\right)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \; (2k < v), \quad D^2\xi = \begin{cases} \frac{v}{v-2}, & v > 2, \\ \infty, & v \leq 2. \end{cases}$$

a. Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład $N(0,1)$, zmienna losowa η ma rozkład chi–kwadrat z v stopniami swobody oraz zmienne te są niezależne, to zmienna losowa $t = \xi/\sqrt{\eta/v}$ ma rozkład t z v stopniami swobody.

. . . .

17. Rozkład F (Snedecora) $F(u, v)$. Zmienna losowa ξ ma rozkład F (Snedecora) z u oraz v stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_{u,v}(x) = \frac{u^{u/2}v^{v/2}\Gamma(\frac{u+v}{2})}{\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} x^{u/2-1}(v + ux)^{-(u+v)/2}, x > 0.$$

$$E\xi^k = \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2} + k\right)\Gamma\left(\frac{v}{2} - k\right)v^k}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)u^k\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \; (2k < v) \qquad D^2\xi = \frac{2v^2(u + v - 2)}{u(v-2)^2(v-4)} \; (v > 4)$$

a. Jeżeli zmienna losowa ξ ma rozkład chi–kwadrat z u stopniami swobody, zmienna losowa η ma rozkład chi–kwadrat z v stopniami swobody i zmienne te są niezależne, to zmienna losowa $F = (\xi/u)/(\eta/v)$ ma rozkład F z (u, v) stopniami swobody.
b. Jeżeli $\xi \sim F(2r, 2p)$, to $\frac{1}{1+\xi} \sim Bet(p, r)$.
c. Jeżeli $\xi \sim F(1, v)$, to $\sqrt{\xi} \sim t(v)$.

. . . .

18. Rozkład z Fishera. Zmienna losowa ξ ma rozkład z Fishera z (r, s) stopniami swobody, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{2r^{\frac{r}{2}}s^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{r+s}{2}\right)e^{rx}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(s + re^{2x})^{\frac{r+s}{2}}}, \quad x \in R$$

$$E\xi = 0, \quad D^2\xi = \frac{1}{2}\frac{r+s}{rs}$$

a. Jeżeli $\xi \sim F(r, s)$, to $\frac{1}{2}\ln\xi$ ma rozkład z Fishera z (r, s) stopniami swobody.

. . . .

19. Rozkład wielomianowy. Wektor losowy $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ ma rozkład wielomianowy z parametrami $(n, p_1, \ldots, p_k)$, jeżeli

$$P\{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{m}\} = P\{\xi_1 = m_1, \ldots, \xi_k = m_k\} = \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!} p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$$

gdzie $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, $\sum_{i=1}^k m_k = n$, $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^k p_k = 1$.

$$E\boldsymbol{\xi} = n(p_1, \ldots, p_k), \quad Cov\xi_i\xi_j = -np_ip_j (i \neq j), \quad D^2\xi_i = np_i(1 - p_i).$$

a. Jeżeli $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ są niezależnymi k–wymiarowymi wektorami losowymi o rozkładach wielomianowych z parametrami $(n_1, \boldsymbol{p}), \ldots, (n_k, \boldsymbol{p})$, to $\boldsymbol{\xi} = \sum \boldsymbol{\xi}^{(i)}$ ma rozkład wielomianowy z parametrami $(\sum n_i, \boldsymbol{p})$.
b. Rozkład wielomianowy jest wielowymiarowym analogiem rozkładu dwumianowego.

. . . .

20. Rozkład Dirichleta. Wektor losowy $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ ma rozkład Dirichleta z parametrami $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ $(\alpha_i > 0)$, jeżeli funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in R^k : \sum_{i=1}^k x_k = 1, x_i > 0\}$.

$$E\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\alpha_0}, \quad Cov\xi_i\xi_j = -\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_0^2(1+\alpha_0)}(i \neq j), \quad D^2\xi_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \quad \left(\alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i\right).$$

a. Rozkład Dirichleta jest wielowymiarowym analogiem rozkładu beta.

. . . .

21. Wielowymiarowy rozkład normalny $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Wektor losowy $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ ma n–wymiarowy rozkład normalny, jeżeli jego funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}.$$

$$E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}, \quad D^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Sigma}$$

a. Jeżeli $\boldsymbol{\xi} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{A}$ – $p \times n$ macierz stałych, to $\boldsymbol{Ax} \sim N_p(\boldsymbol{A\mu}, \boldsymbol{A\Sigma A}^T)$.
b. Jeżeli $\xi_1, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o tej samej wariancji oraz $\boldsymbol{T}$ jest macierzą ortogonalną, to elementy wektora losowego $\boldsymbol{T\xi}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych.
c. Jeżeli $\boldsymbol{\xi}$ ma n–wymiarowy rozkład normalny, to każda składowa ma jednowymiarowy rozkład normalny (twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.)
d. Wektor $\boldsymbol{\xi}$ ma wielowymiarowy rozkład normalny wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall\ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$ $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\xi}$ ma jednowymiarowy rozkład normalny.
e. Niech $\boldsymbol{\xi} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Zmienne losowe $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\xi}$ oraz $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\xi}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\Sigma b} = 0$.

. . . .