

## Estymatory nieobciążone

**6.1.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie próbą losową z rozkładu skoncentrowanego na dodatniej półosi i niech gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem  $\theta^2 x e^{-\theta x}$ ,  $\theta > 0$ . Wyznaczyć ENMW parametru  $\theta$ .

**6.2.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie próbą losową z rozkładu Poissona o nieznannej średniej  $\theta$ . Znaleźć ENMW parametru  $e^{-\theta}$  (prawdopodobieństwa, że zmienna losowa przyjmie wartość zero). Obliczyć wariancję tego estymatora.

**6.3.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , gdzie  $n > 3$ , będzie próbą losową z rozkładu  $N(\mu, \sigma^2)$  o nieznanach  $\mu$  i  $\sigma^2$ . Znaleźć ENMW dla  $\mu^2/\sigma^2$ .

**6.4.** Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależnymi i mają jednakowy rozkład o gęstości  $\theta e^{-x\theta}$  ( $x > 0$ ,  $\theta > 0$ ). Pokazać, że zmienna losowa przyjmująca wartość 1, gdy  $X_1 \geq k$  i wartość 0, gdy  $X_1 < k$ , jest estymatorem nieobciążonym dla  $g(\theta) = e^{-k\theta}$ . Na tej podstawie pokazać, że przy odpowiednim wyborze statystyki  $t$ , zmienna losowa

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} 0, & \text{gd } t < k, \\ \left[\frac{t-k}{t}\right]^{n-1}, & \text{gd } t \geq k \end{cases}$$

jest ENMW dla  $g$ .

**6.5.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie próbą losową z rozkładu  $N(\mu, \sigma^2)$ . Pokazać, że estymator

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

parametru  $\sigma^2$  ma mniejszy błąd średniokwadratowy niż ENMW

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

**6.6.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale  $(0, \theta)$ . Pokazać, że  $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  jest statystyką dostateczną dla  $\theta$  i że istnieje estymator nieobciążony tego parametru postaci  $k \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Wyznaczyć ten estymator nieobciążony i znaleźć jego wariancję. Porównać tę wariancję z dolnym ograniczeniem Cramera–Rao dla wariancji estymatorów nieobciążonych i uzasadnić, dlaczego nie można w tym przypadku stosować nierówności Cramera–Rao.

**6.7.** Wektor losowy  $\mathbf{X}$  ma rozkład znane z dokładnością do dwóch parametrów rzeczywistych  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Niech  $t_1$  będzie statystyką dostateczną dla  $\theta_1$ , gdy  $\theta_2$  jest znane oraz niech  $t_2$  będzie statystyką dostateczną dla  $\theta_2$ , gdy  $\theta_1$  jest znane. Udowodnić, że  $(t_1, t_2)$  jest statystyką dostateczną dla  $\theta_1, \theta_2$ .

**6.8.** Dana jest  $n$ -elementowa próba losowa z rozkładu skoncentrowanego na dodatniej półosi, o gęstości

$$\frac{x+1}{\theta(\theta+1)} e^{-x/\theta},$$

gdzie  $\theta$  jest nieznanym parametrem dodatnim. Wyznaczyć taki estymator wielkości  $(3+2\theta)(2+\theta)/(\theta+1)$ , którego wariancja osiąga ograniczenie dolne Cramera–Rao.

**6.9.** Entomolog pobierał próbę losową z dużej populacji pewnych owadów. Notował płęć chwytanych osobników męskich i przerwał pobieranie próbki, gdy otrzymał  $M$  ( $M > 1$ ) osobników męskich. Otrzymał próbkę o liczności  $X$ . Niech  $\theta$  będzie frakcją osobników męskich w populacji. Znaleźć ENMW parametru  $\theta$ .

**6.10.** Bada się liczbę owadów na liściach pewnej rośliny. Stwierdzono, że  $X_i$  zbadanych liści miało dokładnie  $i$  owadów ( $i = 1, 2, \dots, \sum X_i = N$ ). Zakłada się, że liczba owadów na liściu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z tą jednak różnicą, że na wielu liściach nie stwierdzono ani jednego owada nie w wyniku losowych fluktuacji liczby owadów, ale dlatego, że liście te nie nadawały się na pokarm dla owadów. W związku z tym „pustych” liści nie brano pod uwagę. Pokazać, że

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{iX_i}{N}$$

jest nieobciążonym estymatorem średniej  $\mu$  rozkładu Poissona i wyznaczyć efektywność tego estymatora.