Estymatory nieobciążone

6.1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu skoncentrowanego na dodatniej półosi i niech gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem $\theta^2 x e^{-\theta x}$, $\theta > 0$. Wyznaczyć ENMW parametru θ.

6.2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu Poissona o nieznanej średniej θ. Znaleźć ENMW parametru $e^{-\theta}$ (prawdopodobieństwa, że zmienna losowa przyjmie wartość zero). Obliczyć wariancję tego estymatora.

6.3. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, gdzie $n > 3$, będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ o nieznanych μ i σ^2. Znaleźć ENMW dla μ^2/σ^2.

6.4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi i mają jednakowy rozkład o gęstości $\theta e^{-x\theta}$ ($x > 0$, $\theta > 0$). Pokazać, ze zmienna losowa przyjmująca wartość 1, gdy $X_1 \geq k$ i wartość 0, gdy $X_1 < k$, jest estymatorem nieobciążonym dla $g(\theta) = e^{-k\theta}$. Na tej podstawie pokazać, że przy odpowiednim wyborze statystyki t, zmienna losowa

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t < k, \\ \left[\frac{t-k}{t}\right]^{n-1}, & \text{gdy } t \geq k \end{cases}$$

jest ENMW dla g.

6.5. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$. Pokazać, że estymator

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

parametru σ^2 ma mniejszy błąd średniokwadratowy niż ENMW

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

6.6. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$. Pokazać, że $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jest statystyką dostateczną dla θ i że istnieje estymator nieobciążony tego parametru postaci $k \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Wyznaczyć ten estymator nieobciążony i znaleźć jego wariancję. Porównać tę wariancję z dolnym ograniczeniem Cramera–Rao dla wariancji estymatorów nieobciążonych i uzasadnić, dlaczego nie można w tym przypadku stosować nierówności Cramera–Rao.

6.7. Wektor losowy $\boldsymbol{X}$ ma rozkład znane z dokładnością do dwóch parametrów rzeczywistych θ_1 i θ_2. Niech t_1 będzie statystyką dostateczną dla θ_1, gdy θ_2 jest znane oraz niech t_2 będzie statystyką dostateczną dla θ_2, gdy θ_1 jest znane. Udowodnić, że (t_1, t_2) jest statystyką dostateczną dla $\theta_1, \theta_2)$.

6.8. Dana jest n–elementowa próba losowa z rozkładu skoncentrowanego na dodatniej płosi, o gęstości

$$\frac{x+1}{\theta(\theta+1)}e^{-x/\theta},$$

gdzie θ jest nieznanym parametrem dodatnim. Wyznaczyć taki estymator wielkości $(3+2\theta)(2+\theta)/(\theta+1)$, którego wariancja osiąga ograniczenie dolne Cramera–Rao.

6.9. Entomolog pobierał próbę losową z dużej populacji pewnych owadów. Notował płeć chwytanych osobników męskich i przerwał pobieranie próbki, gdy otrzymał M ($M > 1$) osobników męskich. Otrzymał próbkę o liczności X. Niech θ będzie frakcją osobników męskich w populacji. Znaleźć ENMW parametru θ.

6.10. Bada się liczbę owadów na liściach pewnej rośliny. Stwierdzono, że X_i zbadanych liści miało dokładnie i owadów ($i = 1, 2, \ldots, \sum X_i = N$). Zakłada się, że liczba owadów na liściu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z tą jednak różnicą, że na wielu liściach nie stwierdzono ani jednego owada nie w wyniku losowych fluktuacji liczby owadów, ale dlatego, że liście te nie nadawały się na pokarm dla owadów. W związku z tym „pustych” liści nie brano pod uwagę. Pokazać, że

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{iX_i}{N}$$

jest nieobciążonym estymatorem średniej μ rozkładu Poissona i wyznaczyć efektywność tego estymatora.