Metoda największej wiarogodności

5.1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu o gęstości $p(x,\theta)$ zależnego od pewnego nieznanego parametru rzeczywistego θ. Wyznaczyć ENW w każdym z następujących przypadków
(a) $p(\cdot,\theta)$ jest gęstością rozkładu Poissona o średniej θ;
(b) $p(\cdot,\theta)$ jest gęstością rozkładu wykładniczego, $p(x,\theta) = \theta e^{-x\theta}$
(c) $p(\cdot,\theta)$ jest gęstością rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,\theta)$.
W każdym z tych przypadków wyznaczyć rozkład estymatora największej wiarogodności. Na przykładach (a) i (b) zweryfikować teorię asymptotyczną. Pokazać, że teoria ta nie stosuje się do przypadku (c) i wyjaśnić dlaczego.

5.2. Mieszkańcy wyspy Kalythos (na morzu Egejskim) cierpią na dziedziczną chorobę oczu, której objawy potęgują się wraz z wiekiem. Zbadano pięćdziesięcioelementowe próbki ludności w różnym wieku i zarejestrowano liczbę niewidomych w każdej próbce:

Wiek	20	35	45	55	70
Liczba niewidomych	6	17	26	37	44

Przypuszcza się, że prawdopodobieństwo ślepoty w wieku x, oznaczone przez $P(x)$, wyraża się wzorem

$$P(x) = \left\{1 + e^{-(\alpha+\beta x)}\right\}^{-1}.$$

Sporządzić odpowiedni wykres wyników i skomentować sensowność takiej hipotezy. Oszacować α i β na podstawie tego wykresu i następnie obliczyć wartości ENW. Oszacować również wiek, w którym bardziej prawdopodobne jest oślepnięcie niż pozostanie w zdrowiu.

5.3. Pewien produkt elektrotechniczny wytwarzany jest w bardzo wielu fabrykach. Wadliwość (frakcja produktów wadliwych) p jest różna w różnych fabrykach i ma (na przestrzeni fabryk) w przybliżeniu rozkład beta o gęstości

$$\frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$$

przy czym α i β nie są znane. Przypuśćmy, że wylosowano s fabryk i w każdej z nich zbadano po n_i produktów. Niech m_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ oznacza liczbę produktów wadliwych zaobserwowaną w i–tej fabryce. Podać szczegółowo sposób wyznaczania ENW parametrów α i β. Pokazać, że gdy $n = 1$, parametry α i β nie są identyfikowalne.

5.4. Niech $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2), \ldots, (X_n,Y_n)$ będzie ciągiem par wyników pewnych pomiarów, przy czym wszystkie $2n$ wyniki są niezależne i mają rozkład normalny o wariancji σ^2. Wartość oczekiwana X_i jest równa ξ_i, wartość oczekiwana Y_i jest równa η_i, a wszystkie pary (ξ_i,η_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, leżą na okręgu o środku w punkcie (ξ,η) i o promieniu ϱ. Należy oszacować ξ, η i ϱ. Skonstruować ENW i opracować szczegółowo algorytm obliczeniowy.

5.5. Przy wyznaczaniu oporu pewnego kryształu otrzymano ciąg niezależnych pomiarów (X_i, Y_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, pomiarów natężenia prądu x i napięcia y. Pomiary te obciążone są błędami (ε_i, η_i) tak, że

$$X_i = \mu_i + \varepsilon_i, \qquad Y_i = \nu_i + \eta_i,$$

gdzie μ_i oraz ν_i sa prawdziwymi wartościami natężenia i napięcia prądu w i–tym pomiarze oraz $\nu_i = \alpha\mu_i$, gdzie α jest oporem kryształu. Zakładamy, że błędy są niezależne i mają rozkład normalny ze średnią zero i wariancją: $D^2\varepsilon_i = \sigma_1^2$, $D^2\eta_i = \sigma_2^2 = \lambda\sigma_1^2$, przy czym λ jest znane. Pokazać, że ENW $\hat{\alpha}$ parametru α jest rozwiązaniem równania

$$\hat{\alpha}^2 S_{xy} + \hat{\alpha}(\lambda S_{xx} - S_{yy}) - \lambda S_{xy} = 0,$$

gdzie

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum X_i Y_i \qquad S_{xx} = \frac{1}{n}\sum X_i^2 \qquad S_{yy} = \frac{1}{n}\sum Y_i^2.$$

Pokazać, że gdy ciąg $\sum \mu_i^2/n$ jest zbieżny dla $n \to \infty$, wtedy $\hat{\alpha}$ jest estymatorem zgodnym. Pokazać, że metoda największej wiarogodności nie jest zadowalająca, gdy λ nie jest znane. Wyjaśnić, dlaczego w tym przypadku nie można stosować standardowych twierdzeń o estymatorach największej wiarogodności.

5.6. Pewne radioaktywne ciało emituje losowo cząstki z intensywnością, która z upływem czasu maleje i po czasie t wynosi $\lambda e^{-\kappa t}$. Zaobserwowano, że n pierwszych cząstek zostało wyemitowanych w chwilach $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Napisać równania dla estymatorów największej wiarogodności $\hat{\lambda}$ i $\hat{\kappa}$ i pokazać, że $\hat{\kappa}$ spełnia równanie

$$\frac{\hat{\kappa} t_n}{e^{\hat{\kappa} t_n} - 1} = 1 - \hat{\kappa}\bar{t},$$

gdzie $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$. Podać proste oszacowanie dla $\hat{\kappa}$, gdy $\hat{\kappa} t_n$ jest małe.

5.7. Pewna komórka zawiera granulki, które można traktować jako kulki o jednakowym, ale nieznanym promieniu r, i o których zakłada się, że są rozmieszczone w komórce losowo. W celu oszacowania r obserwuje się pod mikroskopem pewien przekrój komórki. Obserwowany przekrój zawiera n kołowych przekrojów granulek o promieniach $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Wyznaczyć na tej podstawie ENW promienia r. Znaleźć rozkład tego estymatora dla dużych n.

5.8. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gęstości $\theta_1 e^{-\theta_1 x}$ $(x > 0)$ oraz niech $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ będzie niezależną próbą losową z rozkładu o gęstości $\theta_2 e^{-\theta_2 y}$ $(y > 0)$. Wyznaczyć ENW $\hat{\theta}_1$ i $\hat{\theta}_2$. Wyznaczyć w sposób jawny ENW przy dodatkowym warunku $\theta_1 = \theta_2$ i zilustrować na tym przykładzie ogólną teorię warunkowych estymatorów największej wiarogodności.