Metody bayesowskie

13.1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbką losową z rozkładu $N(\theta, \sigma^2)$, w którym wariancja σ^2 jest znana. Niech rozkład *a priori* parametru θ będzie rozkładem normalnym $N(\mu, \tau^2)$. Pokazać, że rozkład *a posteriori* jest rozkładem normalnym $N(\mu_n, \tau_n^2)$, gdzie

$$\mu_n = \frac{n\bar{X}/\sigma^2 + \mu/\tau^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2} \qquad \text{oraz} \qquad \tau_n^{-2} = n\sigma^{-2} + \tau^{-2}.$$

13.2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbką losową z rozkładu $N(\theta_1, \theta_2)$ o nieznanych parametrach θ_1 i θ_2 i niech rozkład *a priori* parametru $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ ma „gęstość”

$$\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta_2} \qquad (-\infty < \theta_1 < \infty,\ \theta_2 > 0).$$

(Wynika stąd, że θ_1 i θ_2 są niezależne i że każda z tych wielkości ma niewłaściwy rozkład *a priori*: θ_1 — rozkład jednostajny na $(-\infty, \infty)$ i θ_2 — rozkład o „gęstości” $1/\theta_2$ na $(0, \infty)$). Pokazać, że rozkład *a posteriori* parametru θ jest taki, że wielkość $\sqrt{n}(\theta_1 - \bar{X})/S$, gdzie

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

ma rozkład t Studenta o $n-1$ stopniach swobody. Wyznaczyć najkrótszy bayesowski przedział ufności na poziomie ufności 0.95.

13.3. Pewien układ fizyczny ma dwa możliwe stany θ_1 i θ_2, a jego ewolucję opisuje jednorodny łańcuch Markowa o macierzy przejść

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix},$$

gdzie $0, \alpha, \beta < 1$. Niech prawdopodobieństwo *a priori*, że układ początkowy znajduje się w stanie θ_1 będzie równe π_1. Wyznaczyć prawdopodobieństwo *a posteriori* tego, że układ początkowo znajdował się w stanie θ_1, jeżeli wiadomo, że po n krokach znajdował się w stanie θ_1. Wyjaśnić, dlaczego ze wzrostem n to prawdopodobieństwo dąży do π_1.

13.4. Produkuje się duże serie lamp elektrycznych. Czas życia (trwałość) lampy jest zmienną losową o rozkładzie z gęstością $\theta e^{-\theta x}$ $(x > 0)$. Serię uważa się za udaną, gdy średnia trwałość lamp w serii jest większa od t. Parametr θ w poszczególnych partiach lamp zmienia się zależnie od jakości wolframu, z którego produkuje się włókna żarzenia; zmienność tego parametru opisuje się za pomocą rozkładu o gęstości $[\Gamma(k)]^{-1}\theta^{k-1}e^{-\theta}$ $(\theta > 0)$. Z pewnej serii produkcyjnej wybrano losowo n lamp i w wyniku zmierzenia ich trwałości otrzymano $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Obliczyć na tej podstawie prawdopodobieństwo *a posteriori*, że seria ta jest udana.

13.5. W każdej z niezależnych prób może z prawdopodobieństwem θ pojawić się pewne zdarzenie E; prawdopodobieństwo θ nie jest znane, ale przypuszcza się, że jest małe. W celu zorientowania się co do wielkości θ przeprowadza się serię prób, którą kontynuuje się dopóty, dopóki nie pojawi się E. Przypuśćmy, że zdarzenie po raz pierwszy pojawia się w n tej próbie. Niech rozkład *a priori* θ ma gęstość $m(1-\theta)^{m-1}$ $(0 < \theta < 1)$. Pokazać, że najkrótszy bayesowski przedział ufności na poziomie ufności $1-\alpha$ jest dla dużych $m+n$ w dobrym przybliżeniu równy

$$\left[\frac{c_1}{(m+n)}, \frac{c_2}{(m+n)}\right],$$

gdzie $c_1 e^{-c_1} = c_2 e^{-c_2}$, $e^{-c_1} - e^{-c_2} = 1 - \alpha$.

13.6. Niech prawdopodobieństwo θ sukcesu w każdej z niezależnych prób ma jednostajny rozkład *a priori*. Pokazać, że prawdopodobieństwo otrzymania r sukcesów w n próbach jest równe $\frac{1}{n+1}$, $r = 0, 1, \ldots, n$. Pokazać, że jeżeli w n pierwszych próbach otrzymano r sukcesów, to prawdopodobieństwo sukcesu w następnej próbie wynosi $\frac{r+1}{n+2}$.

13.7. Zakłada się, że liczba cząstek wypromieniowanych w czasie T przez pewne radioaktywne źródło ma rozkład Poissona o średniej λT, gdzie λ jest intensywnością źródła. Zarejestrowano, że w czasie T dwa niezależne źródła o nieznanych intensywnościach λ_1 i λ_2 wypromieniowały odpowiednio X i Y cząstek. Przed dokonaniem tych obserwacji zakłada się, że λ_1 i λ_2 są niezależne i każda z nich ma rozkład o gęstości $e^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$). Przy założeniu, że δ jest małe i X oraz Y duże, obliczyć prawdopodobieństwa *a priori* i *a posteriori*, że λ_1/λ_2 ma wartość z przedziału $(1-\delta, 1+\delta)$.