Zbiory ufności

9.1. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ o nieznanych μ i σ^2 i niech

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2.$$

Pokazać, że S^2/σ^2 jest funkcją centralną za pomocą której można skonstruować przedział ufności dla wariancji σ^2.

9.2. Na podstawie próbki losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozkładu wykładniczego o gęstości $\theta e^{-x\theta}$ wyznaczyć 95–procentowy przedział ufności dla parametru θ.

9.3. Niech X ma rozkład $N(\mu, \sigma^2)$ o nieznanych parametrach μ i σ. Pokazać, jak za pomocą funkcji $(X-\mu)/\sigma$ można skonstruować taki przedział ufności dla $\theta = (\mu, \sigma)$, który miałby kształt trójkąta.

9.4. Jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest próbką losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, to za pomocą funkcji $(\bar{X} - \mu)/s$ można skonstruować $100(1-\alpha)$–procentowy przedział ufności dla μ, powiedzmy $(\underline{\mu}, \overline{\mu})$, oraz za pomocą funkcji S^2/σ^2 można skonstruować $100(1-\alpha)$–procentowy przedział ufności dla σ, powiedzmy $(\underline{\sigma}, \overline{\sigma})$. W powyższych wzorach $S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$. Rozpatrzmy prostokątny obszar na płaszczyźnie (μ, σ):

$$\left\{ (\mu, \sigma) : \ \underline{\mu} \leq \mu \leq \overline{\mu}, \ \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma} \right\}.$$

Obszar ten można przyjąć za zbiór ufności dla (μ, σ). Co można powiedzieć na temat poziomu ufności?

9.5. Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi o rozkładach z gęstościami równymi odpowiednio $\lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ i $\mu e^{-\mu y}$ $(y > 0)$. Pokazać, że

$$C_{X,Y} = \{(\lambda, \mu) : \lambda X + \mu Y \leq a\}$$

jest obszarem ufności dla (λ, μ) na poziomie ufności $1 - (1+a)e^{-a}$.

9.6. Niech X będzie nieobciążonym estymatorem o znanej wariancji σ_1^2 parametru ξ, niech Y będzie nieobciążonym estymatorem o znanej wariancji σ_2^2 parametru η i niech X i Y będą niezależne. Przypuśćmy, że dla każdej liczby λ zmienna losowa $X - \lambda Y$ ma rozkład normalny. Pokazać, jak można zbudować 95–procentowy przedział ufności dla ilorazu ξ/η.
Może się czasami wydarzyć, że przedział ten jest całą prostą liczbową. Sugeruje to, aby takie przypadki wyłączyć z rozważań przy obliczaniu prawdopodobieństwa p, że przedział ufności zawiera prawdziwą wartość. Pokazać, że po takiej modyfikacji prawdopodobieństwo p zależy od ξ/η.