Weryfikacja hipotez

10.1. W celu zweryfikowania hipotezy, że nieznane prawdopodobieństwo sukcesu jest mniejsze od 0.5 wykonuje się 20 niezależnych prób i hipotezę uważa się za prawdziwą, gdy liczba sukcesów jest mniejsza od 12. Wykreślić funkcje prawdopodobieństw błędów tego testu.

10.2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, 1)$. Przypuśćmy, że weryfikuje się hipotezę, że $\mu = 0$ za pomocą testu z obszarem krytycznym $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sqrt{n}|\bar{x}| > 2\}$ Jaki jest rozmiar tego testu? Naszkicować wykres mocy tego testu.

10.3. Za pomocą próbki $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozkładu $N(\mu, 1)$ weryfikuje się hipotezę, że $\mu = 0$. Rozważa się dwa testy dla weryfikacji tej hipotezy, mianowicie testy z obszarami krytycznymi

$$R_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : |\bar{x}| > k_1\},$$
$$R_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum x_i^2 > k_2\},$$

gdzie k_1 i k_2 są dobrane tak, aby testy miały rozmiar α. Czy któryś z tych testów jest jednostajnie mocniejszy od drugiego?

10.4. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbką losową z rozkładu o gęstości $[\theta^q / \Gamma(q)] x^{q-1} e^{-\theta x}$, skoncentrowanego na dodatniej półosi rzeczywistej. Zakładamy, że q jest znane. Skonstruować najmocniejszy test na poziomie istotności α dla weryfikacji hipotezy $\{\theta_0\}$ wobec alternatywy $\{\theta_1\}$, gdzie $\theta_1 > \theta_0$, i pokazać, że istnieje test JNM dla weryfikacji $\{\theta_0\}$ wobec $\{\theta : \theta > \theta_0\}$. Pokazać, że gdy $q = 1/n$, moc tego testu jest równa $1 - (1 - \alpha)^{\theta/\theta_0}$.

10.5. Właściciel jeziora odsprzedający prawo połowów w tym jeziorze twierdzi, że w jeziorze jest co najmniej N ryb, przy czym N jest dużą liczbą. Dla sprawdzenia tego twierdzenia wyławia się m ryb, znakuje się je i wpuszcza z powrotem do jeziora. Po pewnym czasie, gdy oznakowane ryby rozproszą się po całym jeziorze, wyławia się n ryb; okazuje się, że wśród nich jest r ryb oznakowanych. Twierdzenie właściciela jeziora odrzuca się, gdy iloraz r/n jest większy od pewnej liczby k. Jak należy wybrać k, aby prawdopodobieństwo odrzucenia twierdzenia, gdy jest ono prawdziwe, było nie większe niż 0.1. (Można założyć, że liczby m i n są małe w porównaniu z N.)

10.6. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbką losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$. Pokazać, że istnieje test JNM na poziomie istotności α dla weryfikacji hipotezy $\{\theta_1\}$ przy hipotezie alternatywnej $\{\theta : \theta < \theta_1\}$. Czy istnieje test JNM na poziomie istotności α dla hipotezy $\{\theta_1\}$ wobec alternatywy $\{\theta : \theta \neq \theta_1\}$?

10.7. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają jednakowy rozkład o gęstości $e^{-(x-\theta)}$ $(x > \theta)$. Hipotezę zerową $\{\theta : \theta \leq 1\}$ przy hipotezie alternatywnej $\{\theta : \theta > 1\}$ weryfikuje się za pomocą testu z obszarem krytycznym postaci

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \min(x_1, x_2, \ldots, x_n) > c\}.$$

Wyznaczyć c tak, aby test miał rozmiar α. Naszkicować wykres funkcji mocy tego testu.

10.8. Prawdopodobieństwo, że w pewnym doświadczeniu zaobserwuje się r cząstek jest równe $e^{-\lambda}\lambda^r/r!$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$. Pokazać, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w n niezależnych powtórzeniach tego doświadczenia zaobserwuje się łącznie N cząstek, jest równe $e^{-n\lambda}(n\lambda)^N/N!$. Przypuśćmy, że wiadomo, iż λ jest równe 0.5 lub 1. Na podstawie pięciu niezależnych powtórzeń doświadczenia należy zdecydować, jaką wartość ma λ. Porównać dwie następujące reguły.
REGUŁA 1. Przyjąć, że $\lambda = 0.5$ wtedy i tylko wtedy, gdy łączna liczba zaobserwowanych cząstek jest mniejsza od czterech.
REGUŁA 2. Przyjąć, że $\lambda = 0.5$ wtedy i tylko wtedy, gdy w więcej niż dwóch powtórzeniach doświadczenia nie zaobserwowano ani jednej cząstki.

10.9. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, przy czym X_i ma rozkład $N(\theta_i, 1)$. Weryfikuje się hipotezę, że wszystkie θ_i są równe zeru przy hipotezie alternatywnej, że $\theta_i = 0.5$ dla $i = 1, 2, \ldots, r$ i $\theta_i = -0.5$ dla $i = r+1, \ldots, n$. Pokazać, że najmocniejszy test o rozmiarze 0.05 ma obszar krytyczny

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{r} x_i - \sum_{i=r+1}^{n} x_i > 1.645\sqrt{n}\right\}.$$

Jak duże musi być n, aby moc tego testu była równa co najmniej 0.9?

10.10. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym parametry μ i σ^2 są nieznane. Weryfikuje się hipotezę zerową, że $\sigma = \sigma_0$ wobec hipotezy alternatywnej $\sigma \neq \sigma_0$. Pokazać, że obszar krytyczny testu opartego na ilorazie wiarogodności ma postać

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : k_1 \leq \frac{s^2}{\sigma_0^2} \leq k_2\right\},$$

gdzie $S^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2/n$. wyjaśnić, jak należy ustalać k_1 i k_2, aby test miał rozmiar α.

10.11. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ będą niezależnymi próbkami losowymi z dwóch rozkładów wykładniczych o nieznanych parametrach skali równych, odpowiednio, λ i μ. Weryfikuje się hipotezę zerową $\lambda = \mu$ wobec hipotezy alternatywnej $\lambda \neq \mu$. Pokazać, że obszar krytyczny testu opartego na ilorazie wiarogodności zależy tylko od ilorazu $\bar{Y}/\bar{X}$. Podać sposób konstrukcji testu o rozmiarze α.

10.12. Wykonując pewne doświadczenie można otrzymać jeden z $N+1$ możliwych wyników $z_0, z_1, \ldots, z_N$. Hipoteza zerowa H_0 przypisuje tym wynikom następujące prawdopodobieństwa:

$$P(z_0) = \frac{1}{2}, \quad P(z_i) = \frac{1}{2N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Hipoteza alternatywna jest hipotezą złożoną; przypisuje prawdopodobieństwa $(N-1)/N$ wynikowi z_0 i nie specyfikuje prawdopodobieństw wyników $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Pokazać, że test o rozmiarze 0.5, oparty na ilorazie wiarogodności i wykorzystujący tylko pojedynczą obserwację, przyjmuje hipotezę H_0 wtedy i tylko wtedy, gdy wynikiem tej obserwacji jest z_0. Jaka jest moc tego testu? Czy jest to „dobry” test?

10.13. Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie próbką losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, w którym parametry μ i σ^2 nie są znane i niech H_0 będzie hipotezą, że $\mu = \mu_0$. Hipotezę zerową weryfikuje się wobec alternatywy $\mu \neq \mu_0$. Niech $\Lambda(X)$ będzie statystyką testu opartego na ilorazie wiarogodności. Pokazać, że

$$2\log\Lambda(X) = n\log\left[1 + \frac{n(\bar{X} - \mu_0)}{\sum(X_i - \bar{X})^2}\right].$$

Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu zmiennej losowej $2\log\Lambda(X)$ w przypadku, gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa i sprawdzić, że rozkład tej zmiennej losowej dąży (gdy $n \to \infty$) do rozkładu chi–kwadrat o jednym stopniu swobody.

10.14. Wykonuje się k serii niezależnych prób, przy czym każdą serię kontynuuje się dopóty, dopóki określone zdarzenie E nie pojawi się dokładnie r razy. Niech prawdopodobieństwo zdarzenia E w każdej próbie i–tej serii będzie równe θ_i i niech n_i będzie liczbą prób w tej serii $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Poszczególne serie prób są niezależne. Weryfikuje się hipotezę, że $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k$ wobec alternatywy, że nie wszystkie θ_i są sobie równe. Pokazać, że za podstawę testu można przyjąć statystykę

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{n_i\log\left[\frac{\bar{n}}{n_i}\right] + (n_i - r)\log\left[\frac{n_i - r}{\bar{n} - r}\right]\right\},$$

gdzie $\bar{n} = \sum n_i/k$. Pokazać, że dla dużych r test oparty na tej statystyce jest w przybliżeniu podobny.

10.15. Przypuśćmy, że za podstawę konstrukcji testu hipotezy $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k$ w poprzednim zadaniu przyjęto te koncepcje, które leżały u podstaw testu chi–kwadrat. Pokazać, że wtedy otrzymuje się test oparty na statystyce

$$\frac{r}{\bar{n}(\bar{n}-r)} \sum_{i=1}^{k} (n_i - \bar{n})^2.$$

10.16. Wykonuje się k serii niezależnych prób, po n prób w każdej serii. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_k$ będzie liczbą tych prób w każdej serii, w których zaobserwowano zdarzenie E. Weryfikuje się hipotezę, że prawdopodobieństwo zdarzenia E jest takie samo w każdej próbie wobec alternatywnej, że prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest stałe w każdej serii, ale w różnych seriach może być różne. Wyznaczyć statystykę chi–kwadrat.

10.17. Wyznaczyć test chi–kwadrat dla weryfikacji hipotezy o niezależności w tablicy kontyngencji.

10.18. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie dużą próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ o nieznanych parametrach μ i σ^2. Rozpatrzeć hipotezę, że $\mu = \sigma^2$ i prześledzić na tym przykładzie teorię leżącą u podstaw testu Walda.