

Weryfikacja hipotez

10.1. W celu zweryfikowania hipotezy, że nieznanne prawdopodobieństwo sukcesu jest mniejsze od 0.5 wykonuje się 20 niezależnych prób i hipotezę uważa się za prawdziwą, gdy liczba sukcesów jest mniejsza od 12. Wykreślić funkcje prawdopodobieństw błędów tego testu.

10.2. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, 1)$. Przypuśćmy, że weryfikuje się hipotezę, że $\mu = 0$ za pomocą testu z obszarem krytycznym $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sqrt{n}|\bar{x}| > 2\}$ Jaki jest rozmiar tego testu? Naszkicować wykres mocy tego testu.

10.3. Za pomocą próbki X_1, X_2, \dots, X_n z rozkładu $N(\mu, 1)$ weryfikuje się hipotezę, że $\mu = 0$. Rozważa się dwa testy dla weryfikacji tej hipotezy, mianowicie testy z obszarami krytycznymi

$$R_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : |\bar{x}| > k_1\},$$
$$R_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum x_i^2 > k_2\},$$

gdzie k_1 i k_2 są dobrane tak, aby testy miały rozmiar α . Czy któryś z tych testów jest jednostajnie mocniejszy od drugiego?

10.4. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie próbką losową z rozkładu o gęstości $[\theta^q/\Gamma(q)]x^{q-1}e^{-\theta x}$, skoncentrowanego na dodatniej półosi rzeczywistej. Zakładamy, że q jest znane. Skonstruować najmocniejszy test na poziomie istotności α dla weryfikacji hipotezy $\{\theta_0\}$ wobec alternatywy $\{\theta_1\}$, gdzie $\theta_1 > \theta_0$, i pokazać, że istnieje test JNM dla weryfikacji $\{\theta_0\}$ wobec $\{\theta : \theta > \theta_0\}$. Pokazać, że gdy $q = 1/n$, moc tego testu jest równa $1 - (1 - \alpha)^{\theta/\theta_0}$.

10.5. Właściciel jeziora odsprzedający prawo połowów w tym jeziorze twierdzi, że w jeziorze jest co najmniej N ryb, przy czym N jest dużą liczbą. Dla sprawdzenia tego twierdzenia wyławia się m ryb, znakuje się je i wpuszcza z powrotem do jeziora. Po pewnym czasie, gdy oznakowane ryby rozproszą się po całym jeziorze, wyławia się n ryb; okazuje się, że wśród nich jest r ryb oznakowanych. Twierdzenie właściciela jeziora odrzuca się, gdy iloraz r/n jest większy od pewnej liczby k . Jak należy wybrać k , aby prawdopodobieństwo odrzucenia twierdzenia, gdy jest ono prawdziwe, było nie większe niż 0.1. (Można założyć, że liczby m i n są małe w porównaniu z N .)

10.6. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie próbką losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$. Pokazać, że istnieje test JNM na poziomie istotności α dla weryfikacji hipotezy $\{\theta_1\}$ przy hipotezie alternatywnej $\{\theta : \theta < \theta_1\}$. Czy istnieje test JNM na poziomie istotności α dla hipotezy $\{\theta_1\}$ wobec alternatywy $\{\theta : \theta \neq \theta_1\}$?

10.7. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne i mają jednakowy rozkład o gęstości $e^{-(x-\theta)}$ ($x > \theta$). Hipotezę zerową $\{\theta : \theta \leq 1\}$ przy hipotezie alternatywnej $\{\theta : \theta > 1\}$ weryfikuje się za pomocą testu z obszarem krytycznym postaci

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \min(x_1, x_2, \dots, x_n) > c\}.$$

Wyznaczyć c tak, aby test miał rozmiar α . Naszkicować wykres funkcji mocy tego testu.

10.8. Prawdopodobieństwo, że w pewnym doświadczeniu zaobserwuje się r cząstek jest równe $e^{-\lambda}\lambda^r/r!$ ($r = 0, 1, 2, \dots$). Pokazać, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w n niezależnych powtórzeniach tego doświadczenia zaobserwuje się łącznie N cząstek, jest równe $e^{-n\lambda}(n\lambda)^N/N!$. Przypuśćmy, że wiadomo, iż λ jest równe 0.5 lub 1. Na podstawie pięciu niezależnych powtórzeń doświadczenia należy zdecydować, jaką wartość ma λ . Porównać dwie następujące reguły.

REGUŁA 1. Przyjąć, że $\lambda = 0.5$ wtedy i tylko wtedy, gdy łączna liczba zaobserwowanych cząstek jest mniejsza od czterech.

REGUŁA 2. Przyjąć, że $\lambda = 0.5$ wtedy i tylko wtedy, gdy w więcej niż dwóch powtórzeniach doświadczenia nie zaobserwowano ani jednej cząstki.

10.9. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne, przy czym X_i ma rozkład $N(\theta_i, 1)$. Weryfikuje się hipotezę, że wszystkie θ_i są równe zero przy hipotezie alternatywnej, że $\theta_i = 0.5$ dla $i = 1, 2, \dots, r$ i $\theta_i = -0.5$ dla $i = r + 1, \dots, n$. Pokazać, że najmocniejszy test o rozmiarze 0.05 ma obszar krytyczny

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^r x_i - \sum_{i=r+1}^n x_i > 1.645\sqrt{n} \right\}.$$

Jak duże musi być n , aby moc tego testu była równa co najmniej 0.9?

10.10. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym parametry μ i σ^2 są nieznanymi. Weryfikuje się hipotezę zerową, że $\sigma = \sigma_0$ wobec hipotezy alternatywnej $\sigma \neq \sigma_0$. Pokazać, że obszar krytyczny testu opartego na ilorazie wiarygodności ma postać

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : k_1 \leq \frac{S^2}{\sigma_0^2} \leq k_2 \right\},$$

gdzie $S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 / n$. Wyjaśnić, jak należy ustalać k_1 i k_2 , aby test miał rozmiar α .

10.11. Niech X_1, X_2, \dots, X_n oraz Y_1, Y_2, \dots, Y_n będą niezależnymi próbkami losowymi z dwóch rozkładów wykładniczych o nieznanymi parametrach skali równych, odpowiednio, λ i μ . Weryfikuje się hipotezę zerową $\lambda = \mu$ wobec hipotezy alternatywnej $\lambda \neq \mu$. Pokazać, że obszar krytyczny testu opartego na ilorazie wiarygodności zależy tylko od ilorazu \bar{Y}/\bar{X} . Podać sposób konstrukcji testu o rozmiarze α .

10.12. Wykonując pewne doświadczenie można otrzymać jeden z $N + 1$ możliwych wyników z_0, z_1, \dots, z_N . Hipoteza zerowa H_0 przypisuje tym wynikom następujące prawdopodobieństwa:

$$P(z_0) = \frac{1}{2}, \quad P(z_i) = \frac{1}{2N}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Hipoteza alternatywna jest hipotezą złożoną; przypisuje prawdopodobieństwa $(N - 1)/N$ wynikowi z_0 i nie specyfikuje prawdopodobieństw wyników z_1, z_2, \dots, z_N . Pokazać, że test o rozmiarze 0.5, oparty na ilorazie wiarygodności i wykorzystujący tylko pojedynczą obserwację, przyjmuje hipotezę H_0 wtedy i tylko wtedy, gdy wynikiem tej obserwacji jest z_0 . Jaka jest moc tego testu? Czy jest to „dobry” test?

10.13. Niech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, w którym parametry μ i σ^2 nie są znane i niech H_0 będzie hipotezą, że $\mu = \mu_0$. Hipotezę zerową weryfikuje się wobec alternatywy $\mu \neq \mu_0$. Niech $\Lambda(X)$ będzie statystyką testu opartego na ilorazie wiarygodności. Pokazać, że

$$2 \log \Lambda(X) = n \log \left[1 + \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right].$$

Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu zmiennej losowej $2 \log \Lambda(X)$ w przypadku, gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa i sprawdzić, że rozkład tej zmiennej losowej dąży (gdy $n \rightarrow \infty$) do rozkładu chi-kwadrat o jednym stopniu swobody.

10.14. Wykonuje się k serii niezależnych prób, przy czym każdą serię kontynuuje się dopóty, dopóki określone zdarzenie E nie pojawi się dokładnie r razy. Niech prawdopodobieństwo zdarzenia E w każdej próbie i -tej serii będzie równe θ_i i niech n_i będzie liczbą prób w tej serii ($i = 1, 2, \dots, k$). Poszczególne serie prób są niezależne. Weryfikuje się hipotezę, że $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$ wobec alternatywy, że nie wszystkie θ_i są sobie równe. Pokazać, że za podstawę testu można przyjąć statystykę

$$\sum_{i=1}^k \left\{ n_i \log \left[\frac{\bar{n}}{n_i} \right] + (n_i - r) \log \left[\frac{n_i - r}{\bar{n} - r} \right] \right\},$$

gdzie $\bar{n} = \sum n_i / k$. Pokazać, że dla dużych r test oparty na tej statystyce jest w przybliżeniu podobny.

10.15. Przypuśćmy, że za podstawę konstrukcji testu hipotezy $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$ w poprzednim zadaniu przyjęto te koncepcje, które leżały u podstaw testu chi-kwadrat. Pokazać, że wtedy otrzymuje się test oparty na statystyce

$$\frac{r}{\bar{n}(\bar{n} - r)} \sum_{i=1}^k (n_i - \bar{n})^2.$$

10.16. Wykonuje się k serii niezależnych prób, po n prób w każdej serii. Niech r_1, r_2, \dots, r_k będzie liczbą tych prób w każdej serii, w których zaobserwowano zdarzenie E . Weryfikuje się hipotezę, że prawdopodobieństwo zdarzenia E jest takie samo w każdej próbie wobec alternatywnej, że prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest stałe w każdej serii, ale w różnych seriach może być różne. Wyznaczyć statystykę chi-kwadrat.

10.17. Wyznaczyć test chi-kwadrat dla weryfikacji hipotezy o niezależności w tablicy kontyngencji.

10.18. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie dużą próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ o nieznanymi parametrach μ i σ^2 . Rozpatrzyć hipotezę, że $\mu = \sigma^2$ i prześledzić na tym przykładzie teorię leżącą u podstaw testu Walda.