Powtórzenie rachunku prawdopodobieństwa

1.1. Jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $D(p)$, to zmienna losowa $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$.

1.2. Jeżeli X ma rozkład $B(n, p)$, przy czym n jest „duże" zaś $p < 0.1$, to rozkład zmiennej losowej X można przybliżyć rozkładem $Po(np)$.

1.3. Jeżeli X ma rozkład $B(n, p)$, to dla „dużych" n oraz p takich, że $np(1-p) > 9$ oraz $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$ rozkład zmiennej losowej X można przybliżyć rozkładem $N(np, np(1-p))$.

1.4. Jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $\Gamma(\alpha, \lambda)$, to $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład $\Gamma(n\alpha, \lambda)$.

1.5. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym $E(\theta, \beta)$ i niech

$$Y_1 = X_{1:n},\ Y_j = (n-j+1)(X_{j:n} - X_{j-1:n}), \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Pokazać, że zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ są niezależne i wyznaczyć ich rozkład. Wykazać, że zmienne losowe $X_{1:n}$ oraz $\sum_{j=1}^n (X_j - X_{1:n})$ są niezależne i wyznaczyć ich rozkład.

1.6. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi $N(\mu, \sigma^2)$ i niech $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$. Pokazać, że $\bar{X}$ ma rozkład $N(\mu, \sigma^2/n)$, $(n-1)S^2/\sigma^2$ ma rozkład chi–kwadrat z $n-1$ stopniami swobody oraz $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$ ma rozkład Studenta z $n-1$ stopniami swobody.

1.7. Niech U oraz V będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi–kwadrat z m oraz n stopniami swobody odpowiednio. Pokazać, że zmienna losowa nU/mV ma rozkład F.

1.8. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona ze wspólną średnią λ. Znaleźć rozkład warunkowy zmiennej losowej X_1 pod warunkiem $X_1 + \cdots + X_n$.

1.9. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gęstości e^{-u} $(u > 0)$. Znaleźć rozkład $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ oraz rozkład warunkowy zmiennej losowej X_1 pod warunkiem $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$.

1.10. Niech $\boldsymbol{X}$ będzie n–wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie normalnym ze średnią zero i macierzą kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$. Pokazać, że $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X}$ ma rozkład chi–kwadrat z n stopniami swobody. Jaki rozkład ma $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X}$ gdy $E\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{0}$?

1.11. Wektor losowy n–wymiarowy $\boldsymbol{X}$ jest przedstawiony w postaci $\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}$, a jego wartość oczekiwana $\boldsymbol{\mu}$ i macierz kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$ są przedstawione odpowiednio w postaci $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}' & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$. Znaleźć rozkład warunkowy $\boldsymbol{X}_1$ przy danym $\boldsymbol{X}_2$, gdy wektor $\boldsymbol{X}$ ma rozkład normalny.

1.12. Niech $\boldsymbol{X}$ będzie n–wymiarowym wektorem losowym, którego składowe sa niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym ze średnia zero i wariancją jeden. Niech $\boldsymbol{P}$ będzie symetryczną macierzą idempotentną rzędu $r < n$. Udowodnić, że $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ oraz $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{X}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi–kwadrat.
Ogólniej. Niech $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_k$ będą symetrycznymi macierzami idempotentnymi takimi, że $\boldsymbol{P}_1 + \cdots + \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{I}$. Udowodnić, że zmienne losowe $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}, \ldots, \boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{X}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi–kwadrat.