

## Powtórzenie rachunku prawdopodobieństwa

**1.1.** Jeżeli  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $D(p)$ , to zmienna losowa  $\sum_{i=1}^n X_i$  ma rozkład dwumianowy  $B(n, p)$ .

**1.2.** Jeżeli  $X$  ma rozkład  $B(n, p)$ , przy czym  $n$  jest „duże” zaś  $p < 0.1$ , to rozkład zmiennej losowej  $X$  można przybliżyć rozkładem  $Po(np)$ .

**1.3.** Jeżeli  $X$  ma rozkład  $B(n, p)$ , to dla „dużych”  $n$  oraz  $p$  takich, że  $np(1-p) > 9$  oraz  $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$  rozkład zmiennej losowej  $X$  można przybliżyć rozkładem  $N(np, np(1-p))$ .

**1.4.** Jeżeli  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ , to  $\sum_{i=1}^n X_i$  ma rozkład  $\Gamma(n\alpha, \lambda)$ .

**1.5.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym  $E(\theta, \beta)$  i niech

$$Y_1 = X_{1:n}, Y_j = (n-j+1)(X_{j:n} - X_{j-1:n}), \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Pokazać, że zmienne losowe  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  są niezależne i wyznaczyć ich rozkład. Wykazać, że zmienne losowe  $X_{1:n}$  oraz  $\sum_{j=1}^n (X_j - X_{1:n})$  są niezależne i wyznaczyć ich rozkład.

**1.6.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi  $N(\mu, \sigma^2)$  i niech  $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ ,  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ . Pokazać, że  $\bar{X}$  ma rozkład  $N(\mu, \sigma^2/n)$ ,  $(n-1)S^2/\sigma^2$  ma rozkład chi-kwadrat z  $n-1$  stopniami swobody oraz  $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$  ma rozkład Studenta z  $n-1$  stopniami swobody.

**1.7.** Niech  $U$  oraz  $V$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi-kwadrat z  $m$  oraz  $n$  stopniami swobody odpowiednio. Pokazać, że zmienna losowa  $nU/mV$  ma rozkład  $F$ .

**1.8.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona ze wspólną średnią  $\lambda$ . Znaleźć rozkład warunkowy zmiennej losowej  $X_1$  pod warunkiem  $X_1 + \dots + X_n$ .

**1.9.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gęstości  $e^{-u}$  ( $u > 0$ ). Znaleźć rozkład  $\sum_{i=1}^n X_i$  oraz rozkład warunkowy zmiennej losowej  $X_1$  pod warunkiem  $\sum_{i=1}^n X_i$ .

**1.10.** Niech  $\mathbf{X}$  będzie  $n$ -wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie normalnym ze średnią zero i macierzą kowariancji  $\Sigma$ . Pokazać, że  $\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X}$  ma rozkład chi-kwadrat z  $n$  stopniami swobody. Jaki rozkład ma  $\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X}$  gdy  $E\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ ?

**1.11.** Wektor losowy  $n$ -wymiarowy  $\mathbf{X}$  jest przedstawiony w postaci  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ , a jego wartość oczekiwana  $\boldsymbol{\mu}$  i macierz kowariancji  $\Sigma$  są przedstawione odpowiednio w postaci  $\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma'_{12} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ . Znaleźć rozkład warunkowy  $X_1$  przy danym  $X_2$ , gdy wektor  $\mathbf{X}$  ma rozkład normalny.

**1.12.** Niech  $\mathbf{X}$  będzie  $n$ -wymiarowym wektorem losowym, którego składowe są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym ze średnią zero i wariancją jeden. Niech  $\mathbf{P}$  będzie symetryczną macierzą idempotentną rzędu  $r < n$ . Udowodnić, że  $\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}$  oraz  $\mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{X}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi-kwadrat.

Ogólniej. Niech  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$  będą symetrycznymi macierzami idempotentnymi takimi, że  $\mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$ . Udowodnić, że zmienne losowe  $\mathbf{X}'\mathbf{P}_1\mathbf{X}, \dots, \mathbf{X}'\mathbf{P}_k\mathbf{X}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi-kwadrat.