Spis treści

1 Weryfikacja hipotez statystycznych

1.1 Pojęcia

Pojęcia

Hipoteza statystyczna
Dowolne przypuszczenie dotyczące rozkładu prawdopodobieństwa cechy w populacji.

Oznaczenie H_0

Test statystyczny
Postępowanie mające na celu odrzucenie lub nie odrzucenie hipotezy statystycznej.

Statystyka testowa
Funkcja próby na podstawie której wnioskuje się o odrzuceniu lub nie hipotezy statystycznej.

Pojęcia

Wnioskowanie

Rzeczywistość:	Wniosek o hipotezie H_0	
	nie odrzucać	odrzucić
H_0 prawdziwa	prawidłowy	nieprawidłowy
H_0 nieprawdziwa	nieprawidłowy	prawidłowy

Pojęcia

Wnioskowanie

Rzeczywistość:	Wniosek o hipotezie H_0	
	nie odrzucać	odrzucić
H_0 prawdziwa	prawidłowy	nieprawidłowy
H_0 nieprawdziwa	nieprawidłowy	prawidłowy

Pojęcia

Wnioskowanie

Rzeczywistość:	Wniosek o hipotezie H_0	
	nie odrzucać	odrzucić
H_0 prawdziwa	prawidłowy	**błąd I rodzaju**
H_0 nieprawdziwa	**błąd II rodzaju**	prawidłowy

Pojęcia

Błąd I rodzaju
Błąd wnioskowania polegający na odrzuceniu hipotezy, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa.

Poziom istotności
Dowolna liczba z przedziału $(0, 1)$ określającą prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju.

Oznaczenie: α

Pojęcia

Błąd II rodzaju
Błąd wnioskowania polegający na nieodrzuceniu hipotezy, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa.

Moc testu
Prawdopodobieństwo **nie** popełnienia błędu II rodzaju.
Oznaczenie: $1 - \beta$

2 Porównania z normami

2.1 Wstęp

Jedna populacja

Wstęp
Analizujemy pewną cechę w populacji
Porównania z normami obejmują m.in.:

- porównanie poziomu cechy
- porównanie zróżnicowania cechy

Jedna populacja

Wstęp - cecha ciągła
Próba: $X_1, \ldots, X_n$
Charakterystyki próby:

$$\bar{X}, \quad \text{var}X, \quad s^2 = \frac{\text{var}X}{n-1}$$

Jedna populacja

Wstęp - cecha dychotomiczne

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

2.2 Porównanie z normami: wartość średnia

Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Hipoteza $H_0 : \mu = \mu_0$
Średnia μ oraz wariancja σ^2 są nieznane

Test Studenta
Statystyka testowa

$$t_{\text{emp}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$$

Wnioskowanie
Wartość krytyczna $t(\alpha; n-1)$
Jeżeli $|t_{\text{emp}}| > t(\alpha; n-1)$, to hipotezę $H_0 : \mu = \mu_0$ odrzucamy

Testowanie hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$

Przykład - treść
Przypuszczenie: maszyna pakująca kostki masła nastawiona na jednostkową masę 250 g uległa po pewnym czasie rozregulowaniu. W celu weryfikacji tego przypuszczenia z bieżącej produkcji pobrano próbę otrzymując wyniki 254, 269, 254, 248, 263, 256, 258, 261, 264, 258. Czy można na tej podstawie sądzić, że maszyna uległa rozregulowaniu?

Testowanie hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$

Przykład - rozwiązanie
Populacja: paczkowane kostki masła
Cecha X**:** masa kostki masła
Założenie: cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$
Formalizacja: Rozregulowanie maszyny może być interpretowane jako odejście od nominalnej wagi. Zatem należy zbadać, czy średnia μ wynosi 250, czyli weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu = 250$
Technika statystyczna: test Studenta (test t)
poziom istotności $\alpha = 0.05$

Testowanie hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$

Przykład - rozwiązanie
Obliczenia

$$n = 10$$
$$\bar{x} = 258.5$$
$$s^2 = 36.05$$
$$t_{\text{emp}} = 4.47$$

Testowanie hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$

Przykład - rozwiązanie
Wartość krytyczna: $t(0.05; 9) = 2.2622$
Odpowiedź: Ponieważ $|t_{\text{emp}}| > t(0.05; 9)$, więc hipotezę H_0 odrzucamy
Wniosek: maszyna uległa rozregulowaniu

Testowanie hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$

Przykład - inne rozwiązanie
Populacja: paczkowane kostki masła
Cecha X**:** masa kostki masła
Założenie: cecha X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$
Formalizacja: Rozregulowanie maszyny może być interpretowane jako odejście od nominalnej wagi. Zatem należy zbadać, czy średnia μ wynosi 250, czyli weryfikujemy hipotezę $H_0 : \mu = 250$
Technika statystyczna: przedział ufności dla średniej μ
poziom ufności $1 - \alpha = 0.95$

Testowanie hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$

Przykład - inne rozwiązanie
Obliczenia

$$\mu \in (254.20, 262.80)$$

Odpowiedź: Ponieważ $\mu_0 = 250 \notin (254.20, 262.80)$, więc hipotezę H_0 odrzucamy
Wniosek: maszyna uległa rozregulowaniu

Testowanie hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$

Przedział ufności a test hipotezy

$$H_0 \text{ nie odrzucamy na poziomie istotności } \alpha$$
$$\Updownarrow$$
$$\mu_0 \text{ należy do przedziału ufności}$$
$$\text{na poziomie ufności } 1 - \alpha$$

2.3 Porównanie z normami: wariancja

Rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$

Hipoteza $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
Średnia μ oraz wariancja σ^2 są nieznane

Test chi-kwadrat
Statystyka testowa

$$\chi^2_{\mathrm{emp}} = \frac{\mathrm{var} X}{\sigma_0^2}$$

Wnioskowanie
Wartości krytyczne $\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right)$ oraz $\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right)$

Jeżeli $\chi^2_{\mathrm{emp}} < \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right)$ lub $\chi^2_{\mathrm{emp}} > \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right)$, to hipotezę $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ odrzucamy

2.4 Porównanie z normami: frakcja

Rozkład dwumianowy $B(n, p)$

Hipoteza $H_0 : p = p_0$
k - liczba sukcesów w próbie n elementowej

Test przybliżony („duże” n)
Statystyka testowa

$$u_{\mathrm{emp}} = \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

Wnioskowanie
Wartość krytyczna $u_{1-\alpha/2}$

Jeżeli $|u_{\mathrm{emp}}| > u_{1-\alpha/2}$, to $H_0 : p = p_0$ odrzucamy

Hipoteza $H_0 : p = p_0$

Przykład - treść
W swojej ofercie sprzedaży stawu rybnego jego właściciel podaje, iż w stawie żyje tysiąc karpi. Potencjalny nabywca zainteresowany jest sprawdzeniem prawdziwości tego twierdzenia. W tym celu wyłowiono sto karpi i po zaobrączkowaniu ich wpuszczono je z powrotem do stawu. Po jakimś czasie ponownie odłowiono sto ryb i stwierdzono, że wśród nich jest piętnaście zaobrączkowanych. Czy w świetle uzyskanych wyników można reklamę uznać za prawdziwą?

Hipoteza $H_0 : p = p_0$

Przykład - rozwiązanie
Populacja: ryby w stawie
Cecha X**:** ryba zaobrączkowana/nie zaobrączkowana
Założenie: cecha X ma rozkład dwupunktowy $D(p)$
Formalizacja: Jeżeli w stawie żyje N ryb, to odsetek zaobrączkowanych wynosi $100/N$. Zgodnie z twierdzeniem właściciela, $N = 1000$, czyli odsetek ryb zaobrączkowanych wynosi 0.1
Technika statystyczna: Przybliżony test hipotezy $H_0 : p = 0.1$
Poziom istotności: $\alpha = 0.05$

Hipoteza $H_0 : p = p_0$

Przykład - rozwiązanie
Obliczenia

$$n = 100$$

$$k = 15$$

$$u_{\text{emp}} = \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{15 - 10}{\sqrt{100 \cdot 0.1 \cdot 0.9}} = 1.6667$$

Hipoteza $H_0 : p = p_0$

Przykład - rozwiązanie
Wartość krytyczna: $u_{1-0.05/2} = u_{0.975} = 1.96$
Odpowiedź: Ponieważ $|u_{\text{emp}}| < u_{0.975}$, więc hipotezy H_0 nie odrzucamy
Wniosek: można uznać, że w stawie jest tysiąc ryb

3 Porównanie populacji

3.1 Wstęp

Dwie populacje

Wstęp

Analizujemy tę samą cechę w dwóch niezależnych od siebie populacjach

Analiza porównawcza obejmuje m.in.:

- porównanie poziomu cech
- porównanie zróżnicowania cech

Dwie populacje

Wstęp - cechy ciągłe

Próba z pierwszej populacji: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$

Charakterystyki pierwszej próby:

$$\bar{X}_1, \quad \text{var}X_1, \quad s_1^2 = \frac{\text{var}X_1}{n_1 - 1}$$

Dwie populacje

Wstęp - cechy ciągłe

Próba z drugiej populacji: $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$

Charakterystyki drugiej próby:

$$\bar{X}_2, \quad \text{var}X_2, \quad s_2^2 = \frac{\text{var}X_2}{n_2 - 1}$$

Dwie populacje

Wstęp - cechy ciągłe

Charakterystyki łączne

$$S_e^2 = \frac{\text{var}X_1 + \text{var}X_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$S_r = \sqrt{S_e^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

Dwie populacje

Wstęp - cechy dychotomiczne
Pierwsza populacja:

$$\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$$

Druga populacja:

$$\hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$$

Razem:

$$\hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$$

3.2 Testowanie hipotez: porównanie dwóch średnich

Rozkłady normalne $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ **i** $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
założenie: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Test Studenta
Statystyka testowa

$$t_{\text{emp}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_r}$$

Wnioskowanie
Wartość krytyczna $t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$
Jeżeli $|t_{\text{emp}}| > t(\alpha; n_1 + n_2 - 1)$, to hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ odrzucamy

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Przykład - treść
Badano zawartość tłuszczu w serach żółtych produkowanych zimą i latem. W każdym z dwóch okresów zbadano zawartość tłuszczu w dziesięciu serach. Na podstawie uzyskanych wyników stwierdzić, czy zawartość tłuszczu w serze żółtym zależy od pory roku.

Sery produkowane zimą:

$$\sum x_{1i} = 293.7, \quad \text{var} x_1 = 35.321$$

Sery produkowane latem:

$$\sum x_{2i} = 271.2, \quad \text{var} x_2 = 18.176$$

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Przykład - rozwiązanie
Populacja 1: sery produkowane latem
Populacja 2: sery produkowane zimą
Cecha X**:** zawartość tłuszczu
Założenia:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
Zadanie: weryfikacja hipotezy $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
Technika statystyczna: test Studenta porównania średnich
poziom istotności $\alpha = 0.05$

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Przykład - rozwiązanie
Obliczenia

$$\bar{x}_1 = 29.37, \ \text{var} X_1 = 35.321$$

$$\bar{x}_2 = 27.12, \ \text{var} X_2 = 18.176$$

$$s_r^2 = \frac{35.321 + 18.176}{18} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) = 0.5944$$

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Przykład - rozwiązanie
Obliczenia

$$t_{\text{emp}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_r} = \frac{29.37 - 27.12}{0.771} = 2.918$$

$$t(0.05; 18) \approx 2.1009$$

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Przykład - rozwiązanie
Odpowiedź: Ponieważ $|t_{\text{emp}}| > t(0.05; 18)$, więc hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ odrzucamy

Wniosek. Średnie zawartości tłuszczu w serach produkowanych latem i zimą nie są takie same.

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Przykład - dalsze wnioski
Ponieważ weryfikowana hipoteza została odrzucona, więc można pokusić się o ocenę różnic między średnimi zawartościami tłuszczu.

Skonstruować przedział ufności dla różnicy $\mu_1 - \mu_2$ średnich (poziom ufności 0.95)

Z przeprowadzonych wcześniej obliczeń otrzymujemy:

$$(29.37 - 27.12 - 2.1009 \cdot 0.771,\ 29.37 - 27.12 + 2.1009 \cdot 0.771)$$

$$(0.631,\ 3.869).$$

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Przykład - dalsze wnioski

$$\mu_1 - \mu_2 \in (0.631,\ 3.869).$$

Ponieważ oba końce tego przedziału są dodatnie, więc możemy stwierdzić, że średnia zawartość tłuszczu w serach produkowanych latem jest wyższa niż średnia zawartość tłuszczu w serach produkowanych zimą. Co więcej, przeciętnie w letnich serach jest tego tłuszczu więcej o co najmniej 0.631, ale nie więcej niż 3.869 jednostek.

3.3 Testowanie hipotez: porównanie dwóch wariancji

Rozkłady normalne $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ **i** $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Hipoteza $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
nieznane wartości średnie μ_1 oraz μ_2

Test F

Statystyka testowa

$$F_{\text{emp}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Rozkłady normalne $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ **i** $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Hipoteza $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
nieznane wartości średnie μ_1 oraz μ_2

Wnioskowanie
Wartości krytyczne

$$F\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n_1 - 1, n_2 - 1\right) \text{ oraz } F\left(\frac{\alpha}{2}; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$$

Jeżeli $F_{\text{emp}} < F\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$ lub $F_{\text{emp}} > F\left(\frac{\alpha}{2}; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$, to hipotezę $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ odrzucamy

3.4 Testowanie hipotez: porównanie dwóch frakcji

Rozkłady dwumianowe $B(n_1, p_1)$ **i** $B(n_2, p_2)$

Hipoteza $H_0 : p_1 = p_2$
założenie: n_1 i n_2 „duże"

Test przybliżony
Statystyka testowa

$$u_{\text{emp}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

Wnioskowanie
Wartość krytyczna $u_{1-\alpha/2}$
Jeżeli $|u_{\text{emp}}| \geq u_{1-\alpha/2}$, to $H_0 : p_1 = p_2$ odrzucamy

Hipoteza $H_0 : p_1 = p_2$

Przykład - treść
Celem badania było porównanie przygotowania z matematyki kandydatów na studia będących absolwentami liceów oraz techników. W tym celu spośród kandydatów zdających matematykę wylosowano 400 absolwentów liceów oraz 600 absolwentów techników. W wylosowanej grupie stwierdzono, że 385 absolwentów liceów oraz 501 absolwentów techników rozwiązało test wstępny. Czy można na tej podstawie sądzić, że przygotowanie w obu grupach absolwentów jest jednakowe?

Hipoteza $H_0 : p_1 = p_2$

Przykład - rozwiązanie
Populacja 1: absolwenci liceów zdający egzamin wstępny
Populacja 2: absolwenci techników zdający egzamin wstępny
Cecha X**:** umiejętność rozwiązania testu (tak/nie)
Założenia:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $B(n_1, p_1)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $B(n_2, p_2)$
Zadanie: Weryfikacja hipotezy $H_0 : p_1 = p_2$
Technika statystyczna: Test przybliżony (poziom istotności $\alpha = 0.05$)

Hipoteza $H_0 : p_1 = p_2$

Przykład - rozwiązanie
Obliczenia

$$n_1 = 400 \quad k_1 = 385 \quad \hat{p}_1 = 385/400 = 0.9625$$

$$n_2 = 600 \quad k_2 = 501 \quad \hat{p}_2 = 501/600 = 0.8350$$

$$\hat{p} = (385 + 501)/(400 + 600) = 0.886$$

$$u_{\text{emp}} = \frac{0.9625 - 0.8350}{\sqrt{0.886(1 - 0.886)\left(\frac{1}{400} + \frac{1}{600}\right)}} = 6.215$$

Hipoteza $H_0 : p_1 = p_2$

Przykład - rozwiązanie
Wartość krytyczna $u_{0.975} = 1.96$

Odpowiedź: ponieważ $|u_{\text{emp}}| > u_{0.975}$, więc hipotezę $H_0 : p_1 = p_2$ odrzucamy

Wniosek: przygotowanie absolwentów liceów i techników z matematyki nie jest takie same

Hipoteza $H_0 : p_1 = p_2$

Przykład - dalsze wnioski
Ponieważ weryfikowana hipoteza została odrzucona, więc można pokusić się o ocenę różnic między odsetkami absolwentów, którzy zdają pomyślnie egzamin.

Skonstruować przedział ufności dla różnicy $p_1 - p_2$ średnich (poziom ufności 0.95)

Z przeprowadzonych wcześniej obliczeń otrzymujemy:

$$(0.9625 - 0.8350 - 1.96 \cdot 0.0205,\ 0.9625 - 0.8350 + 1.96 \cdot 0.0205)$$

$$(0.0873,\ 0.1677).$$

Hipoteza $H_0 : p_1 = p_2$

Przykład - dalsze wnioski

$$p_1 - p_2 \in (0.0873,\ 0.1677).$$

Ponieważ oba końce tego przedziału są dodatnie, więc możemy stwierdzić, że absolwenci liceów są lepiej przygotowani do egzaminu niż absolwenci techników. Co więcej, odsetek absolwentów liceów pozytywnie zdających egzamin jest wyższy od odsetka absolwentów techników o co najmniej 8.7%, ale nie więcej niż 16.8%.

3.5 Testowanie hipotez: porównanie wielu średnich

Kilka populacji

Wstęp
Analizujemy tę samą cechę w kilku niezależnych od siebie populacjach

Analiza porównawcza obejmuje m.in.:

- porównanie poziomu cech
- porównanie zróżnicowania cech

Kilka populacji

Wstęp - cechy ciągłe

Próba z i-tej populacji: $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ $(i = 1, \ldots, K)$

Charakterystyki i-tej próby:

$$\bar{X}_i, \quad \text{var}X_i, \quad s_i^2 = \frac{\text{var}X_i}{n_i - 1}$$

Kilka populacji

Wstęp - cechy ciągłe

Charakterystyki łączne

$$N = n_1 + \cdots + n_K$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$S_e^2 = \frac{\text{var}X_1 + \cdots + \text{var}X_K}{N - K}$$

Rozkłady normalne $N(\mu_i, \sigma_i^2)$**,** $i = 1, \ldots, K$

Hipoteza $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_K$

założenie: $\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_K^2$

Test F

Statystyka testowa

$$F_{\text{emp}} = \frac{\sum_{i=1}^{K} (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2/(K-1)}{S_e^2}$$

Wnioskowanie

Wartość krytyczna $F\,(\alpha; K - 1, N - K)$

Jeżeli $F_{\text{emp}} > F\,(\alpha; K - 1, N - K)$, to hipotezę $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_K$ odrzucamy

Rozkłady normalne $N(\mu_i, \sigma_i^2)$**,** $i = 1, \ldots, K$

Tabela analizy wariancji

Źródło zmienności	Stopnie swobody	Sumy kwadratów	Średnie kwadraty	F_{emp}
Czynnik Błąd losowy	$k-1$ $N-k$	var$A$ var$E$	$S_a^2 = \frac{\text{var}A}{k-1}$ $S_e^2 = \frac{\text{var}E}{N-k}$	S_a^2/S_e^2
Ogółem	$N-1$	var$T$		

Rozkłady normalne $N(\mu_i, \sigma_i^2)$**,** $i = 1, \ldots, K$

Wniosek praktyczny
Przynajmniej jedna ze średnich $\mu_1, \ldots, \mu_k$ jest inna od pozostałych.

Pytanie
Jaki jest układ średnich?

Grupa jednorodna
Podzbiór średnich, które można uznać za takie same.

Rozkłady normalne $N(\mu_i, \sigma_i^2)$**,** $i = 1, \ldots, K$

Procedury porównań wielokrotnych
Tukeya, Scheffégo, Bonfferroniego, Duncana, Newmana–Kuelsa

Ogólna idea
NIR — najmniejsza istotna różnica

Jeżeli
$|\bar{X}_i - \bar{X}_j| < NIR$
$|\bar{X}_i - \bar{X}_l| < NIR$
$|\bar{X}_l - \bar{X}_j| < NIR$,
to uznajemy, że $\mu_i = \mu_j = \mu_l$.

ANOVA - przykład

Przykład
Przeprowadzić analizę porównawczą wyników punktowych klasówki w grupach studenckich.

ANOVA - przykład

Przykład
Populacje: dziesięć populacji indeksowanych numerami grup studenckich
Badana cecha: ilość punktów uzyskanych na klasówce
Założenia:
cecha X ma w i–tej populacji rozkład $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, \ldots, 10$)
$\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_{10}^2$

ANOVA - przykład

Przykład
Formalizacja
weryfikacja hipotezy $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_{10}$
Techniki statystyczne
- Jednoczynnikowa analiza wariancji
- Porównania szczegółowe

Poziom istotności 0.05

4 Test chi-kwadrat niezależności

Test chi-kwadrat niezależności

Przykład
W celu stwierdzenia, czy podanie chorym na pewną chorobę nowego leku przynosi poprawę w ich stanie zdrowia wylosowano dwie grupy pacjentów w jednakowym stopniu chorych na tę chorobę. Jednej grupie podawano nowy lek, zaś drugiej podawano leki tradycyjne. Na podstawie zanotowanych zmian stanu zdrowia zbadać, czy nowy lek daje inne efekty leczenia niż lek tradycyjny.

lek	bez poprawy	wyraźna poprawa	całkowite wyleczenie
nowy	20	40	60
tradycyjny	45	20	15

Test chi-kwadrat niezależności

Postać danych

Klasy cechy Y	Klasy cechy X 1	2	...	m
1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1m}
2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{km}

Test chi-kwadrat niezależności

Statystyka testowa

$$\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{(n_{ij}-n_{ij}^t)^2}{n_{ij}^t}$$

gdzie

$$n_{ij}^t = \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{N},\ N = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}$$

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} n_{ij},\ n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$$

Test chi-kwadrat niezależności

Wnioskowanie
Jeżeli $\chi^2_{emp} > \chi^2(\alpha; (k-1)(m-1))$, to hipotezę hipotezę o niezależności cech odrzucamy

Test chi-kwadrat niezależności

Przykład - rozwiązanie
Populacja: chorzy na pewną chorobę
Cechy (X, Y)**:** (zmiana stanu zdrowia, rodzaj leku)
Założenia: cechy mają charakter jakościowy
Zadanie: Weryfikacja hipotezy *badane cechy są niezależne*
Technika statystyczna: Test niezależności chi-kwadrat (poziom istotności $\alpha = 0.05$)

Test chi-kwadrat niezależności

Przykład - rozwiązanie
Obliczenia:

liczba osób, których stan zdrowia:
bez poprawy: 65
wyraźna poprawa: 60
całkowicie wyleczonych: 75

liczba osób:
leczonych nowym lekiem: 120
leczonych tradycyjnie: 80

Test chi-kwadrat niezależności

Przykład - rozwiązanie
Gdyby stan zdrowia nie zależał od leku, to powinno być

lek	bez poprawy	wyraźna poprawa	całkowite wyleczenie
nowy	39	36	45
tradycyjny	26	24	30

a jest

lek	bez poprawy	wyraźna poprawa	całkowite wyleczenie
nowy	20	40	60
tradycyjny	45	20	15

Test chi-kwadrat niezależności

Przykład - rozwiązanie
Wartość statystyki testu chi-kwadrat niezależności

$$\chi^2_{emp} = 36.75$$

Wartość krytyczna: 5.99

Stwierdzamy, że nowy lek ma **inne** działanie niż tradycyjny.

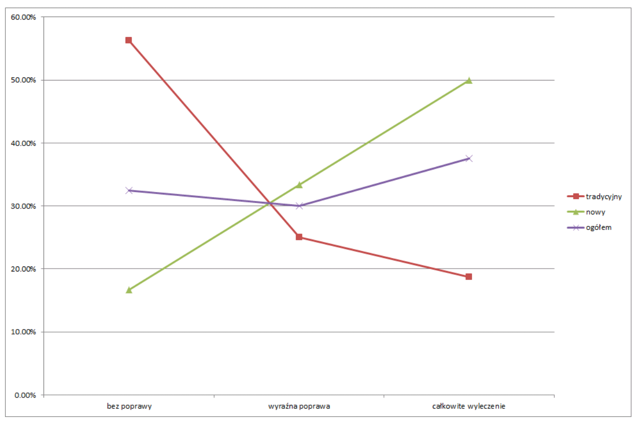
Test chi-kwadrat niezależności

Przykład - rozwiązanie

lek	bez poprawy	wyraźna poprawa	całkowite wyleczenie
nowy	16.67%	33.33%	50.00%
tradycyjny	56.25%	25.00%	18.75%
	32.50%	30.00%	37.50%

Test chi-kwadrat niezależności

Przykład - rozwiązanie



5 Testy diagnostyczne

Przykład

Test CRP

CRP (białko C-reaktywne) jest czułym wskaźnikiem ostrych i przewlekłych stanów zapalnych o różnym pochodzeniu. Poziom CRP, jednego z tzw. białek ostrej fazy, wzrasta w surowicy i osoczu w trakcie ogólnej, niespecyficznej odpowiedzi na infekcje (głównie bakteryjne) oraz stany zapalne bez tła infekcyjnego(...) Oznaczenie stężenia CRP wykorzystuje się w diagnostyce (...)

Fizjologiczne stężenie CRP nie przekracza 5 mg/L, **stężenie większe niż 10 mg/L uznawane jest za patologiczne.**

Pojęcia

Wynik testu

Rzeczywistość:	Wynik testu	
	dodatni	ujemny
chory (+)	prawidłowy	nieprawidłowy
zdrowy (-)	nieprawidłowy	prawidłowy

Pojęcia

Wynik testu

Rzeczywistość:	Wynik testu	
	dodatni	ujemny
chory (+)	prawidłowy	nieprawidłowy
zdrowy (-)	nieprawidłowy	prawidłowy

Pojęcia

Wynik testu

Rzeczywistość:	Wynik testu	
	dodatni	ujemny
chory (+)	prawdziwie dodatni	nieprawdziwie ujemny
zdrowy (-)	nieprawdziwie dodatni	prawdziwie ujemny

Pojęcia

Czułość testu

prawdopodobieństwo uzyskania wyniku prawdziwie dodatniego

to znaczy

prawdopodobieństwo uzyskania wyniku dodatniego dla osoby chorej

określa zdolność testu do wykrywania osób chorych

Pojęcia

Swoistość testu
prawdopodobieństwo uzyskania wyniku prawdziwie ujemnego

to znaczy

prawdopodobieństwo uzyskania wyniku ujemnego dla osoby zdrowej

określa zdolność testu do wykrywania osób zdrowych

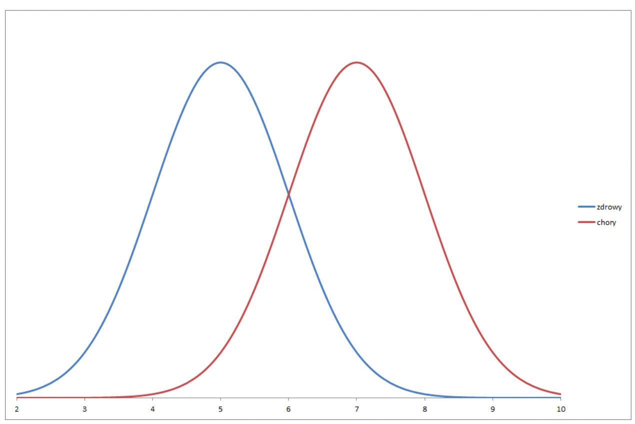
Zadanie

Cel
Wyznaczyć wartość krytyczną dla testu minimalizującą prawdopodobieństwa błędów.

To znaczy jak najbardziej czułego i o jak największej swoistości

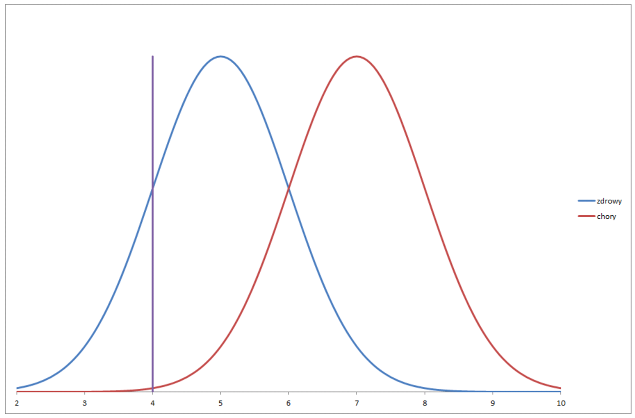
Przykład

Zdrowi i chorzy



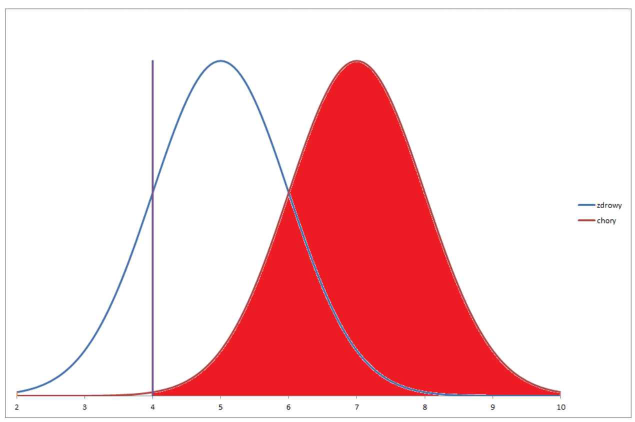
Przykład

Zdrowi i chorzy



Przykład

Zdrowi i chorzy

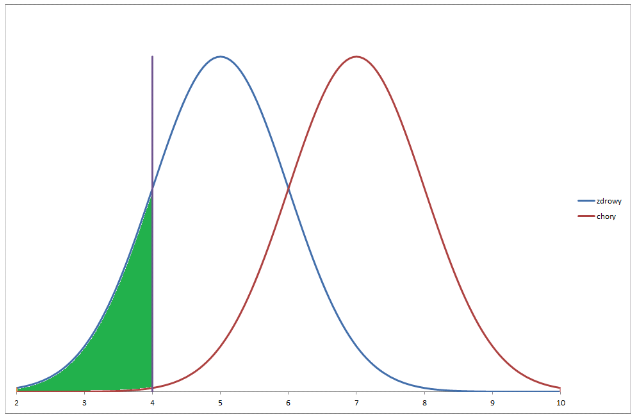


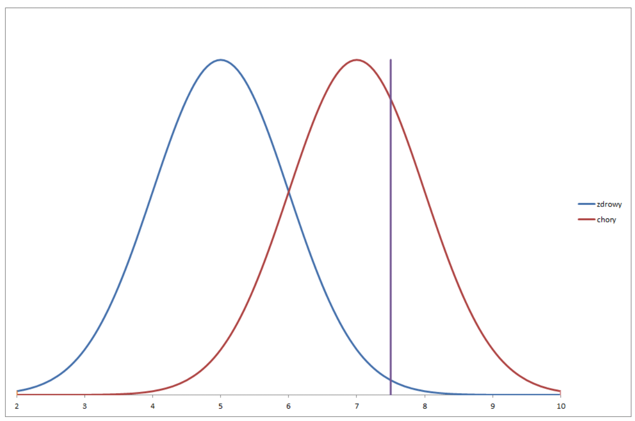
Przykład

Zdrowi i chorzy

Przykład

Zdrowi i chorzy





Przykład

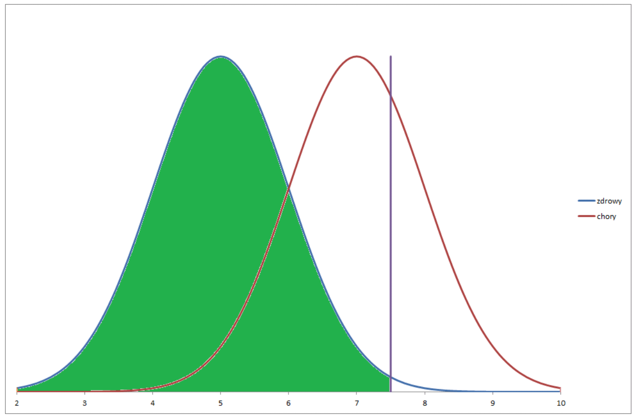
Zdrowi i chorzy

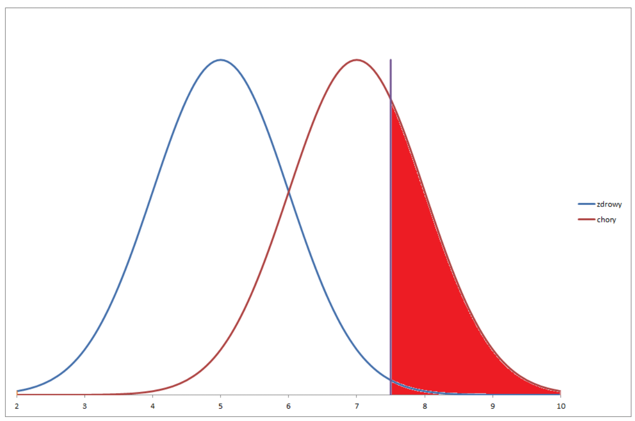
Przykład

Zdrowi i chorzy

Przykład

Zdrowi i chorzy





barierka	swoistość	czułość
4	15.87%	99.87%
5	50.00%	97.72%
6	84.13%	84.13%
7	97.72%	50.00%
8	99.87%	15.87%
9	100.00%	2.28%

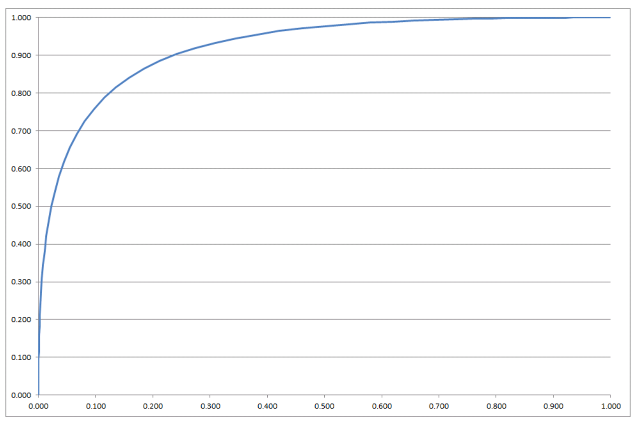
Przykład

Krzywa ROC (*odsetek wyników pozytywnych***)**

barierka	1-swoistość	czułość
4	84.13%	99.87%
5	50.00%	97.72%
6	15.87%	84.13%
7	2.28%	50.00%
8	0.13%	15.87%
9	0.00%	2.28%

Przykład

Krzywa ROC



Nieznajomość matematyki zabija

Irena Cieślińska GW 21.11.2014

Zrobiłam mammografię. Dostałam wynik. Pozytywny. - Czy mam raka, doktorze? - zapytałam.

- Czułość testu wynosi 87 proc. To nie oznacza z całą pewnością, że ma pani nowotwór, bo zawsze jest jeszcze szansa, że zalicza się pani do 13 proc. szczęśliwców. Radziłbym wykonać teraz dodatkowe badania, biopsję.

- Ale ryzyko, że mam raka, wynosi jakieś 87 proc.?

- Niestety tak. Przykro mi to mówić.

A jak powinno być

Czułość wynosi 87%

$$P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} = 0.87$$

Swoistość wynosi 93%

$$P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba zdrowa}\} = 0.07$$

A jak powinno być

Częstość występowania choroby wynosi 0.7%

$$P\{\text{osoba chora}\} = 0.007$$

Ogólny odsetek wyników pozytywnych

$$\begin{aligned}
&P\{\text{wynik pozytywny}\} = \\
&P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} \cdot P\{\text{osoba chora}\}+ \\
&P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba zdrowa}\} \cdot P\{\text{osoba zdrowa}\} = \\
&0.87 \cdot 0.007 + 0.07 \cdot 0.993 = 0.0756
\end{aligned}$$

A jak powinno być

Ryzyko choroby przy pozytywnym wyniku

$$\begin{aligned}
&P\{\text{osoba chora}|\text{wynik pozytywny}\} = \\
&\frac{P\{\text{wynik pozytywny}|\text{osoba chora}\} \cdot P\{\text{osoba chora}\}}{P\{\text{wynik pozytywny}\}} = \\
&\frac{0.87 \cdot 0.007}{0.0756} = 0.0805
\end{aligned}$$