Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Rachunek prawdopodobieństwa
zajmuje się analizą praw rządzących zdarzeniami losowymi. Pojęciami pierwotnymi są: *zdarzenie elementarne* ω oraz *zbiór zdarzeń elementarnych* Ω.

Doświadczenie losowe
realizacja określonego zespołu warunków wraz z góry określonym zbiorem wyników.

Zdarzenie losowe A
jest podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych Ω.

Prawdopodobieństwo (definicja aksjomatyczna) jest funkcją określoną na zbiorze zdarzeń losowych:

1. $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, o ile $A \cap B = \emptyset$

Prawdopodobieństwo (definicja klasyczna)
Jeżeli Ω składa się z n jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych, to prawdopodobieństwo zdarzenia A składającego się z k zdarzeń elementarnych wyraża się wzorem

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A pod warunkiem realizacji zdarzenia B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (P(B) > 0)$$

Prawdopodobieństwo całkowite. Jeżeli zdarzenia $B_1, \ldots, B_n$ są takie, że $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla wszystkich $i \neq j$, $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ oraz $P(B_i) > 0$ dla wszystkich i, to dla dowolnego zdarzenia A zachodzi

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

Twierdzenie Bayesa.

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Niezależność zdarzeń. Zdarzenia A oraz B są niezależne, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Równoważnie

$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$

Zmienna losowa (cecha)
Funkcja o wartościach rzeczywistych określona na zbiorze zdarzeń elementarnych.

Rozkład zmiennej losowej
Zbiór wartości zmiennej losowej oraz prawdopodobieństwa z jakimi są te wartości przyjmowane.

Przykład. Jednokrotny rzut kostką.
Zmienna losowa: ilość wyrzuconych oczek.
Zbiór wartości: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Rozkład (kostka uczciwa)

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Rozkład (kostka nieuczciwa)

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/24	1/24	1/24	1/24	1/6	2/3

Zmienna losowa skokowa (dyskretna) jest to zmienna, której zbiór wartości jest skończony lub przeliczalny

Jeżeli x_1 oraz x_2 są kolejnymi wartościami zmiennej losowej skokowej, to nie przyjmuje ona żadnych wartości między x_1 a x_2

Przykłady Rzut kostką, liczba bakterii, ilość pracowników

Zmienna losowa ciągła jest to zmienna przyjmująca wszystkie wartości z pewnego przedziału (najczęściej zbioru liczb rzeczywistych)

Jeżeli x_1 oraz x_2 są dwiema wartościami zmiennej losowej ciągłej, to może ona przyjąć dowolną wartość między x_1 a x_2

Przykłady Wzrost, ciężar paczki towaru, wydajność pracowników

Dystrybuanta F jest funkcją określoną na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ wzorem

$$F(x) = P\{X \leq x\}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

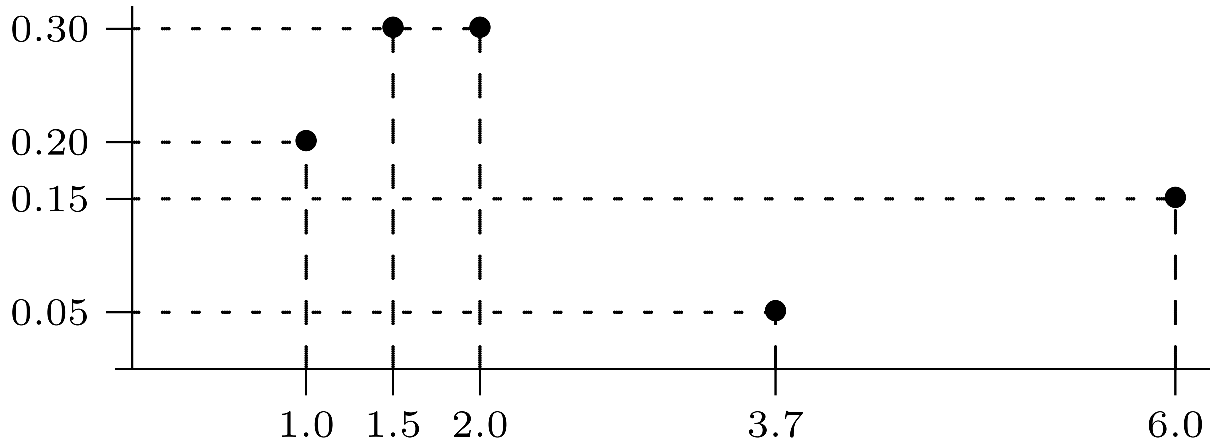
Najważniejsze własności dystrybuanty
1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1$
3. dystrybuanta jest funkcją niemalejącą
4. $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$

Funkcja (gęstości) rozkładu prawdopodobieństwa f jest funkcją określoną na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ wzorem

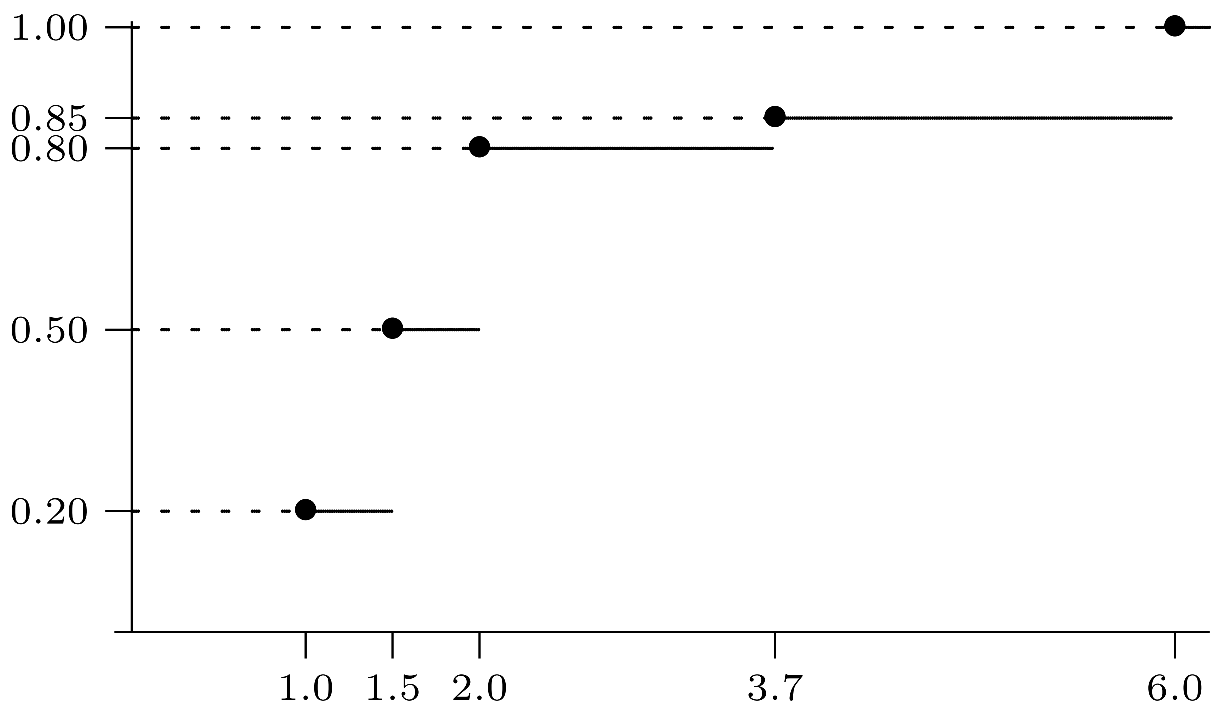
$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{jeżeli } F'(x) \text{ istnieje} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Najważniejsze własności funkcji gęstości
1. $f(x) \geq 0$
2. $P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$

Skokowa zmienna losowa

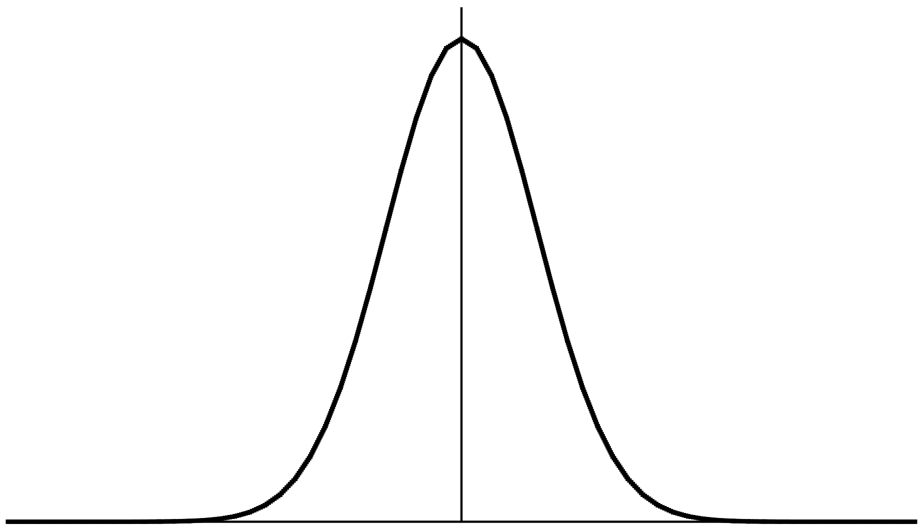


Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa

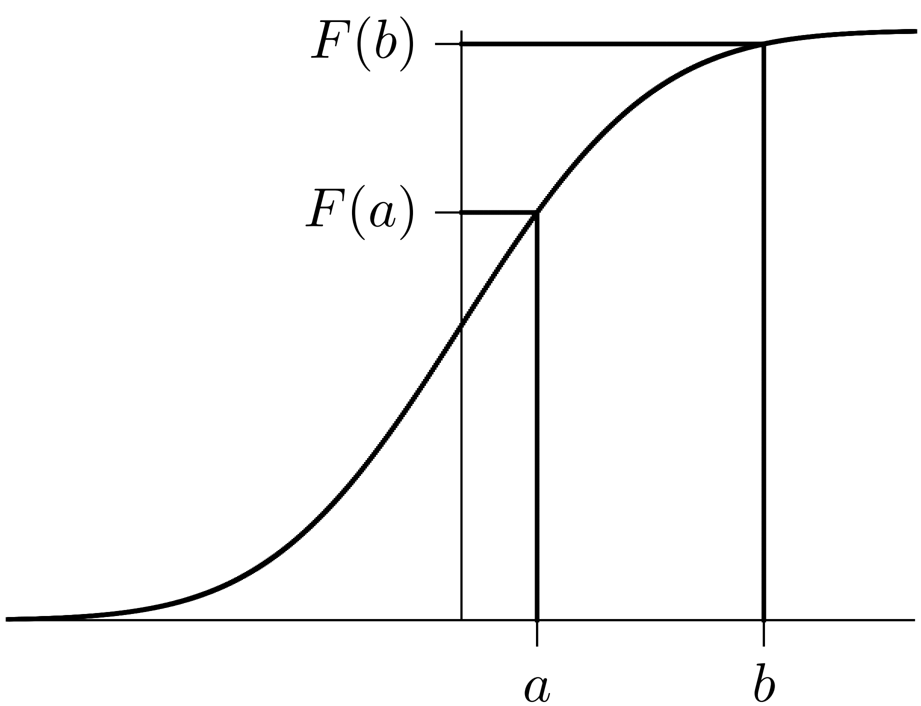


Dystrybuanta

Ciągła zmienna losowa



Funkcja gęstości



Dystrybuanta

Charakterystyki liczbowe zmiennych losowych

Wartość oczekiwana (średnia). Wartość oczekiwana EX zmiennej losowej X jest liczbą charakteryzującą położenie zbioru jej wartości

$$EX = \begin{cases} \sum x_i p_i & \text{dla zmiennej skokowej} \\ \int x f(x) dx & \text{dla zmiennej ciągłej} \end{cases}$$

Prawo wielkich liczb:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow EX$$

Wariancja. Wariancja D^2X zmiennej losowej jest liczbą charakteryzującą rozrzut zbioru jej wartości wokół wartości średniej EX

$$D^2X = \begin{cases} \sum (x_i - EX)^2 p_i \\ \int (x - EX)^2 f(x) dx \end{cases}$$

Odchylenie standardowe. Odchylenie standardowe DX zmiennej losowej X jest liczbą charakteryzującą rozrzut zbioru jej wartości wokół wartości średniej EX

$$DX = \sqrt{D^2X}$$

Kwantyl rzędu p zmiennej losowej X jest to taka liczba x_p, że

$$F(x_p) = p$$

Frakcja. Jeżeli A jest danym podzbiorem zbioru wartości zmiennej losowej X, to frakcją nazywamy liczbę

$$p = P\{X \in A\}$$

Asymetria (skośność). Liczba γ_1 charakteryzująca „niejednakowość” rozproszenia wartości zmiennej losowej wokół wartości oczekiwanej.

Rozkład dwupunktowy

Zmienna losowa X ma rozkład $D(p)$, jeżeli

$$P\{X = 1\} = p = 1 - P\{X = 0\}$$

$$EX = p \qquad D^2X = p(1 - p)$$

Doświadczenie Bernoulliego
Wykonujemy dwuwynikowe doświadczenie. Wyniki nazywane są umownie *sukces* oraz *porażka*. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p (porażki: $1 - p$). Niech zmienną losową X będzie uzyskanie sukcesu.

Zmienna losowa X ma rozkład $D(p)$.

Przykłady.
Płeć osoby.
Wadliwość produktu.

Rozkład dwumianowy

Zmienna losowa X ma rozkład $B(n, p)$, jeżeli

$$P_{n,p}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$EX = np \qquad D^2X = np(1-p)$$

Schemat Bernoulliego
Zmienną losową o rozkładzie $D(p)$ obserwujemy n krotnie w sposób niezależny. Niech zmienną losową X będzie ilość sukcesów.

Zmienna losowa X ma rozkład $B(n, p)$.

Przykłady.
Ilość nasion, z których wzeszły rośliny.
Ilość wadliwych produktów.
„Popularność” danej osobistości publicznej.

$$P_{n,p}\{X = k\} = P_{n,1-p}\{X = n - k\}$$

Przykład.
„Niezaliczalność” klasówki jest równa 30%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na dziesięć wylosowanych klasówek będzie co najwyżej jedna niepozytywna.

Doświadczenie Bernoulliego: ocena klasówki

„Sukces” — klasówka niezaliczona; $p = 0.3$

X — liczba niezaliczonych klasówek wśród dziesięciu wylosowanych

$$P_{10,0.3}\{X \leq 1\} = P_{10,0.3}\{X = 0\} + P_{10,0.3}\{X = 1\}$$

Tablice: $$Q(k; n, p) = \sum_{i=k}^{n} P_{n,p}\{X = i\}$$

$$P_{10,0.3}\{X \leq 1\} = 1 - Q(2; 10, 0.3) = 1 - 0.85069$$

$$\begin{aligned} P_{10,0.3}\{X = 1\} &= Q(1; 10, 0.3) - Q(2; 10, 0.3) \\ &= 0.97175 - 0.85069 = 0.12106 \end{aligned}$$

Rozkład Poissona

Zmienna losowa X ma rozkład $Po(\lambda)$, jeżeli

$$P_\lambda\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \ldots.$$

$$EX = \lambda \qquad D^2X = \lambda$$

Przykłady.
Ilość wad na metrze kwadratowym produkowanego materiału.
Ilość klientów przybywających do sklepu w jednostce czasu.

Przykład.
Ile średnio powinno przypadać rodzynków na bułeczkę, by prawdopododobieństwo, że w bułeczce znajdzie się co najmniej jeden rodzynek, było nie mniejsze niż 0.99?

X — ilość rodzynków w bułeczce

$$X \sim Po(\lambda), \qquad \lambda = ?$$

Znaleźć takie λ, że $P_\lambda\{X \geq 1\} \geq 0.99$.

Tablice: $$Q(k;\lambda) = \sum_{i=k}^{\infty} P_\lambda\{X = i\}$$

$$Q(1;\lambda) \geq 0.99 \Longrightarrow \lambda = 4.8$$

Obliczenia:

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$e^{-\lambda} \leq 0.01 \Longrightarrow \lambda \geq -\log 0.01 = 4.60517$$

Rozkład normalny

Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$ o wartości średniej μ i wariancji σ^2, jeżeli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ -\infty < x < \infty.$$

$$EX = \mu \qquad D^2X = \sigma^2.$$

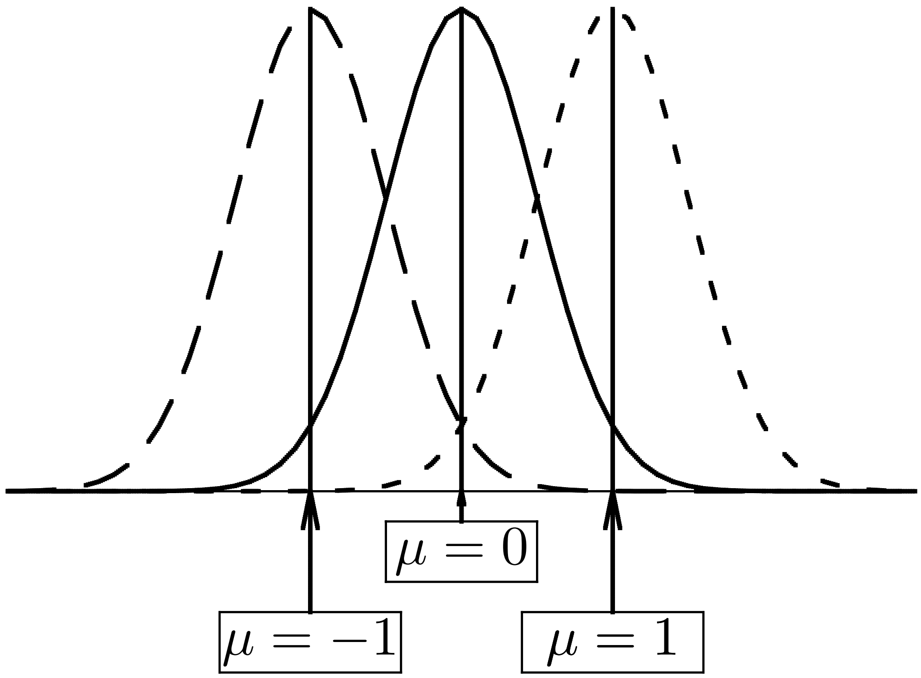
Przykłady.
Błędy pomiarowe.
Ciężar ciała.
Zawartość białka w mięsie.

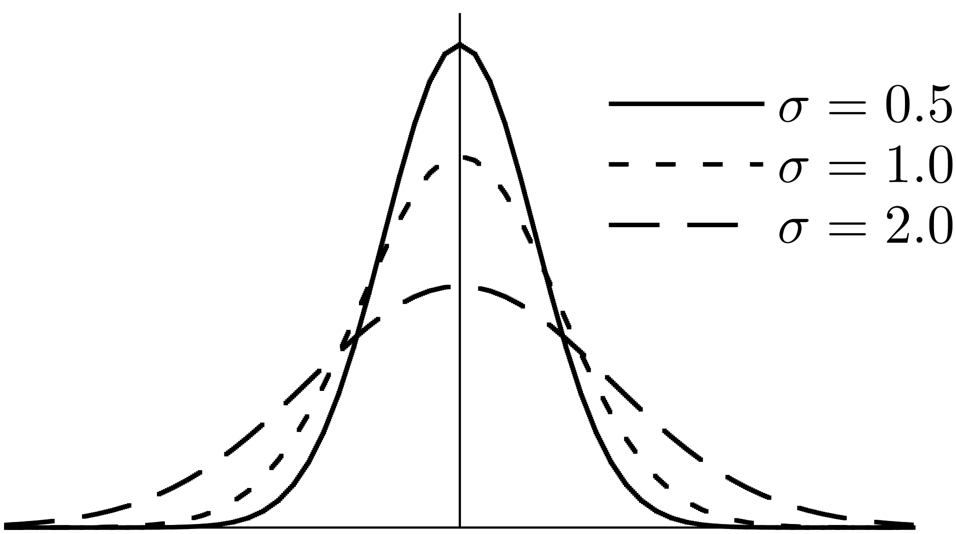
Standardowy rozkład normalny: $N(0, 1)$

Dystrybuanta $F(x)$ standardowego rozkładu normalnego ($N(0, 1)$) jest stablicowana.

$$F(x) = 1 - F(-x)$$

Rozkład normalny





Standaryzacja

Jeżeli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, to

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\begin{aligned} P\{X \in (a,b)\} &= P\left\{Z \in \left(\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma}\right)\right\} \\ &= F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

. . . .

Przykład. Dla zmiennej losowej $X \sim N(10,16)$ obliczyć $P\{X \in (8,14)\}$

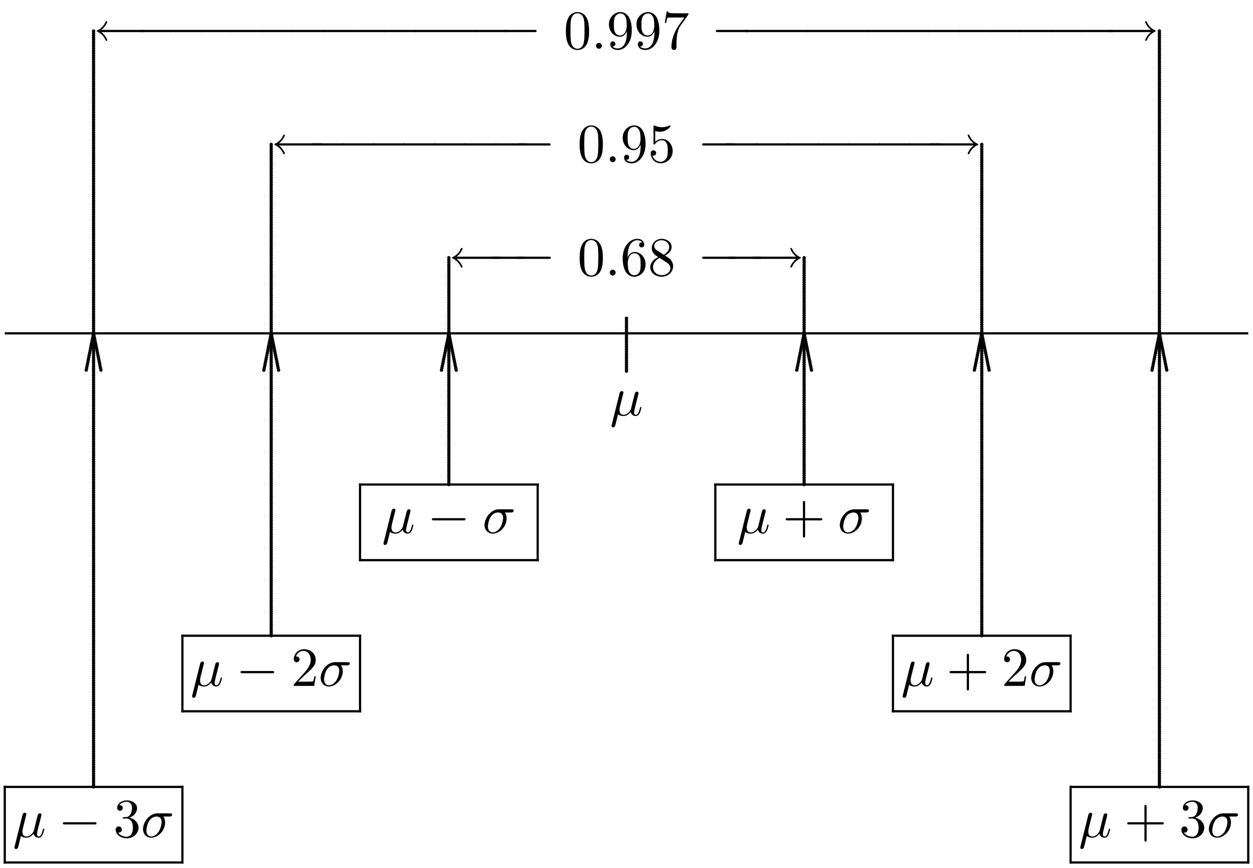
$$\begin{aligned} P\{X \in (8,14)\} &= P\left\{Z \in \left(\frac{8-10}{4}, \frac{14-10}{4}\right)\right\} \\ &= F(1) - F(-0.5) \\ &= 0.84134 - (1 - 0.69146) \\ &= 0.53380 \end{aligned}$$

Prawo trzech sigm

$$P\{|X - \mu| < \sigma\} = 0.68268 \approx 0.68$$

$$P\{|X - \mu| < 2\sigma\} = 0.95450 \approx 0.95$$

$$P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = 0.99730 \approx 0.997$$



Pożyteczne przybliżenia

$$X \sim B(n,p),\ n \text{ duże},\ p \text{ małe}$$

$$\Downarrow$$

$$X \sim Po(np)$$

. . . .

$$X \sim B(n,p),\ n \text{ duże},\ p \text{ „około" } 0.5$$

$$\Downarrow$$

$$X \sim N(np, np(1-p))$$

. . . .

$$X \sim Po(\lambda),\ \lambda \text{ duże}$$

$$\Downarrow$$

$$X \sim N(\lambda - 0.5, \lambda) \text{ lub } \sqrt{X} \sim N\left(\sqrt{\lambda}, \frac{1}{4}\right)$$