Porównanie dwóch rozkładów normalnych

Założenia:
1. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
2. X_1, X_2 są niezależne

Ocena $\mu_1 - \mu_2$ oraz σ_1^2/σ_2^2.

Próby: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}; X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$

$$\bar{X}_1, \quad \mathrm{var}X_1, \quad s_1^2 = \frac{\mathrm{var}X_1}{n_1 - 1}$$

$$\bar{X}_2, \quad \mathrm{var}X_2, \quad s_2^2 = \frac{\mathrm{var}X_2}{n_2 - 1}$$

Ocena różnicy między średnimi $\mu_1 - \mu_2$

Ocena punktowa: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

Przedział ufności (poziom ufności $1 - \alpha$)

1. Założenie $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)s_r, \\ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)s_r)$$

$$s_e^2 = \frac{\mathrm{var}X_1 + \mathrm{var}X_2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad s_r^2 = s_e^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

2. Bez założenia $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - V(\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1, c)s_r, \\ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + V(\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1, c)s_r)$$

$$s_r^2 = \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right) \qquad c = \frac{s_1^2/n_1}{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$$

$V(\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1, c)$ — wartość krytyczna testu Behrensa–Fishera

Przykład. Ocenić różnicę między średnimi wynikami klasówki pań i panów.
Panowie:

$$n_1 = 138, \quad \sum x_{1i} = 82.833, \quad \mathrm{var} x_1 = 1.65841$$

Panie:

$$n_2 = 162, \quad \sum x_{2i} = 93.733, \quad \mathrm{var} x_2 = 2.23348$$

Populacja 1:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki
Populacja 2:
Słuchaczki podstawowego kursu statystyki

Cecha X: ilość punktów zdobytych na klasówce

Założenie:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Zadanie: oszacować różnicę $\mu_1 - \mu_2$

Technika statystyczna:
przedział ufności t dla różnicy średnich
poziom ufności 0.95

Obliczenia

$$\bar{x}_1 = 0.60024, \quad \bar{x}_2 = 0.57860,$$

$$s_r^2 = \frac{1.65841 + 2.23348}{138 + 162 - 2} \left(\frac{1}{138} + \frac{1}{162} \right)$$
$$= 0.000175255$$

$$t(0.05; 298) \approx 1.96; \quad t(0.05; 298) s_r = 0.02595$$

$$(0.60024 - 0.57860 \pm 0.00034) = (-0.00431, 0.04759)$$

Odpowiedź: $\mu_1 - \mu_2 \in (-0.00431, 0.04759)$

Wniosek.
Różnica średnich ilości punktów zdobywanych na klasówce przez panie i panów jest liczbą z przedziału $(-0.00431, 0.04759)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Sugestia. Ponieważ przedział „obejmuje" zero, więc można uznać, że $\mu_1 = \mu_2$.

Ocena ilorazu wariancji σ_1^2/σ_2^2

Ocena punktowa: S_1^2/S_2^2

Przedział ufności (poziom ufności $1-\alpha$)

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F\left(1-\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1\right),\right.$$
$$\left.\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F\left(\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1\right)\right)$$

$F(\alpha;u,v)$ jest stablicowaną wartością krytyczną rozkładu F–Snedecora (Fishera–Snedecora)

$$F(1-\alpha;u,v)=\frac{1}{F(\alpha;v,u)}$$

Przykład. Porównać zróżnicowanie ocen wyników klasówek pań i panów.

Panowie:

$$n_1 = 138, \quad \sum x_{1i} = 82.833, \quad \mathrm{var} x_1 = 1.65841$$

Panie:

$$n_2 = 162, \quad \sum x_{2i} = 93.733, \quad \mathrm{var} x_2 = 2.23348$$

Populacja 1:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki
Populacja 2:
Słuchaczki podstawowego kursu statystyki

Cecha X: ilość punktów zdobytych na klasówce

Założenie:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Zadanie: oszacować iloraz σ_1^2/σ_2^2

Technika statystyczna:
przedział ufności dla ilorazu wariancji
poziom ufności 0.90

Obliczenia

$$s_1^2 = \frac{1.65841}{138-1} = 0.01211, \quad s_2^2 = \frac{2.23348}{162-1} = 0.01387,$$

$$F(0.05; 137, 161) = 1.30936$$

$$\begin{aligned} F(0.95; 137, 161) &= \frac{1}{F(0.05; 161, 137)} \\ &= \frac{1}{1.31386} = 0.76111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{0.01211}{0.01387} \cdot 0.76111, \frac{0.01211}{0.0138} \cdot 1.30936\right) \\ &= (0.66415, 1.14255) \end{aligned}$$

Odpowiedź: $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \in (0.66415, 1.14255)$

Wniosek.
Iloraz wariancji ilości punktów zdobywanych na klasówce jest liczbą z przedziału $(0.66415, 1.14255)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 90%.

Sugestia. Ponieważ przedział „obejmuje” jedynkę, więc można uznać, że $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Porównanie dwóch rozkładów dwupunktowych

Założenia:
1. $X_1 \sim D(p_1), X_2 \sim D(p_2)$
2. X_1, X_2 są niezależne

Ocena $p_1 - p_2$.

Próby: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}; X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ ($X_{ij} = 0$ lub 1)

$$k_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} \qquad k_2 = \sum_{i=1}^{n_2} X_{12}$$

$$\hat{p}_1 = k_1/n_1 \quad \hat{p}_2 = k_2/n_2 \quad \hat{p} = (k_1 + k_2)/(n_1 + n_2)$$

Przedział ufności (poziom ufności $1 - \alpha$)

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \right.$$

$$\left. \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \right)$$

Przykład.
Oszacować różnicę między „niezaliczalnością” klasówki ze statystyki przez panie i panów. Na podstawie dotychczasowych danych wiadomo, że na 162 pań nie zaliczyło klasówki 46 pań oraz na 138 panów 30 uzyskało ocenę negatywną.

Populacja 1:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki
Populacja 2:
Słuchaczki podstawowego kursu statystyki

Cecha X: uzyskanie z klasówki oceny negatywnej

Założenie:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $D(p_1)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $D(p_2)$

Zadanie: oszacować różnicę $p_1 - p_2$

Technika statystyczna:
przybliżony przedział ufności dla różnicy prawdopodobieństw
poziom ufności 0.95: $u_{0.975} = 1.96$

Obliczenia

$$n_1 = 162 \quad k_1 = 46 \qquad n_2 = 138 \quad k_2 = 30$$

$$\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1} = \frac{46}{162} = 0.2840 \quad \hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2} = \frac{30}{138} = 0.2174$$

$$\hat{p} = \frac{(k_1 + k_2)}{(n_1 + n_2)} = \frac{(46 + 30)}{(162 + 138)} = 0.2533$$

$$1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2533(1 - 0.2533)}{300}} \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{138} \right) = 0.0987$$

$$(0.2840 - 0.2174 - 0.0987, 0.2840 - 0.2174 + 0.0987)$$

$$(-0.0321,\ 0.1653)$$

Wniosek. Różnica prawdopodobieństw jest liczbą z przedziału $(-0.0321,\ 0.1653)$.

Sugestia. Ponieważ przedział „obejmuje” zero, więc odsetki pań i panów niezaliczających klasówki można traktować jako porównywalne.

Porównanie dwóch rozkładów normalnych

Założenia:
1. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
2. X_1, X_2 są niezależne

Czy $\mu_1 = \mu_2$?

Czy $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$?

Próby: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}; X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$

$$\bar{X}_1, \quad \mathrm{var}X_1, \quad s_1^2 = \frac{\mathrm{var}X_1}{n_1 - 1}$$

$$\bar{X}_2, \quad \mathrm{var}X_2, \quad s_2^2 = \frac{\mathrm{var}X_2}{n_2 - 1}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Założenie $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Test Studenta (poziom istotności α)

Statystyka testowa

$$t_{\mathrm{emp}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_r}$$

$$S_r = \sqrt{S_e^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}, \quad S_e^2 = \frac{\mathrm{var} X_1 + \mathrm{var} X_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Wartość krytyczna $t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$

Jeżeli $|t_{\mathrm{emp}}| > t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$,
to hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ odrzucamy

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Bez założenia $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Test V Behrensa–Fishera (poziom istotności α)

Statystyka testowa

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_r}$$

$$S_r = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Wartość krytyczna $V(\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1, c)$ $(n_1 \le n_2)$

$$c = \frac{S_1^2/n_1}{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}$$

Jeżeli $|V| > V(\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1, c)$,
to hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ odrzucamy

Przykład. Porównać przeciętne osiągnięcia punktowe pań i panów na klasówce ze statystyki
Panowie:

$$n_1 = 138, \quad \sum x_{1i} = 82.833, \quad \mathrm{var} x_1 = 1.65841$$

Panie:

$$n_2 = 162, \quad \sum x_{2i} = 93.733, \quad \mathrm{var} x_2 = 2.23348$$

Populacja 1:
Słuchacze podstawowego kursu statystyki
Populacja 2:
Słuchaczki podstawowego kursu statystyki

Cecha X: ilość punktów zdobytych na klasówce

Założenia:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Zadanie: zweryfikować hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Technika statystyczna:
test t
poziom istotności 0.05

Obliczenia

$$\bar{x}_1 = 0.60024 \quad \bar{x}_2 = 0.57860$$

$$s_r^2 = \frac{1.65841 + 2.23348}{138 + 162 - 2}\left(\frac{1}{138} + \frac{1}{162}\right)$$
$$= 0.000175255$$

$$t_{\text{emp}} = \frac{0.60024 - 0.57860}{\sqrt{0.000175255}} = 1.634$$

Wartość krytyczna $t(0.05; 298) \approx 1.96$

Odpowiedź: hipotezy nie odrzucamy

Wniosek.
Średnie ilości punktów uzyskiwane przez panie i panów można traktować jako porównywalne.

Przedział ufności a test hipotezy $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Cecha $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

H_0 nie odrzucamy na poziomie istotności α

$$\Updownarrow$$

$$|t_{\text{emp}}| < t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$$

$$\Updownarrow$$

$$-t(\alpha; n_1 + n_2 - 2) < \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_r} < t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \in \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t(\alpha; n_1 + n_2 - 2) S_r\right)$$

$$\Updownarrow$$

0 należy do przedziału ufności

na poziomie ufności $1 - \alpha$

Przykład. Porównać wartości średnie dwóch cech X_1 oraz X_2 o rozkładach normalnych.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Test V Behrensa–Fishera ($\alpha = 0.05$)

Próby:

$$\begin{array}{lll} n_1 = 20 & \bar{x}_1 = 74.40 & s_1^2 = 15.41 \\ n_2 = 20 & \bar{x}_2 = 65.05 & s_2^2 = 83.73 \end{array}$$

$$V = \frac{74.40 - 65.05}{\sqrt{\frac{15.41}{20} + \frac{83.73}{20}}} = \frac{9.35}{\sqrt{4.96}} = 4.19$$

$$c = \frac{15.41/20}{15.41/20 + 83.73/20} = \frac{0.77}{4.96} = 0.15$$

Wartość krytyczna $V(0.05; 19, 19, 0.15) = 2.06$

Ponieważ $|V| > V(0.05; 19, 19, 0.15)$, więc hipotezę $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ odrzucamy.

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$

Założenie $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Test Studenta (poziom istotności α)

Statystyka testowa

$$t_{\text{emp}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_r}$$

Wartość krytyczna $t(2\alpha; n_1 + n_2 - 2)$

Jeżeli $t_{\text{emp}} > t(2\alpha; n_1 + n_2 - 2)$, to hipotezę $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ odrzucamy

....

Bez założenia $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Test V Behrensa–Fishera (poziom istotności α)

Statystyka testowa

$$V = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_r}$$

Wartość krytyczna $V(2\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1, c)$ $(n_1 \leq n_2)$

Jeżeli $V > V(2\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1, c)$, to hipotezę $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ odrzucamy.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Test F (poziom istotności α)

Statystyka testowa

$$F_{\text{emp}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Wartości krytyczne
$F\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$
$F\left(\frac{\alpha}{2}; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$

Jeżeli
$F_{\text{emp}} < F\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$
lub
$F_{\text{emp}} > F\left(\frac{\alpha}{2}; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$
to hipotezę $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ odrzucamy

Uwaga

$$F\left(1-\alpha;u,v\right)=\frac{1}{F\left(\alpha;v,u\right)}$$

Reguła: większa wariancja do licznika.

Jeżeli $S_1^2 > S_2^2$, to wyznaczana jest statystyka

$$F_{\text{emp}}=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

i hipoteza jest odrzucana, gdy

$$F_{\text{emp}} > F\left(\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1\right)$$

Jeżeli zaś $S_1^2 < S_2^2$, to wyznaczana jest statystyka

$$F_{\text{emp}}=\frac{S_2^2}{S_1^2}$$

i hipoteza jest odrzucana, gdy

$$F_{\text{emp}} > F\left(\frac{\alpha}{2};n_2-1,n_1-1\right)$$

Przykład. Dla sprawdzenia stabilności pracy maszyny pobrano dwie próbki: pierwszą w początkowym okresie eksploatacji oraz drugą po miesięcznym okresie pracy tej maszyny. Wykonano pomiary wylosowanych produktów i otrzymano wyniki: $n_1 = 25$, $\bar{x}_1 = 3.24$, $s_1^2 = 0.1447$ oraz $n_2 = 19$, $\bar{x}_2 = 3.19$, $s_2^2 = 0.1521$. Zbadać na tej podstawie czy maszyna nie rozregulowała się w trakcie pracy.

Populacja 1
produkcja maszyny w początkowym okresie

Populacja 2
produkcja maszyny po miesiącu eksploatacji

Cecha X
pomiar produktu

Założenia
cecha X ma w populacji 1 rozkład $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Formalizacja
Stabilność pracy maszyny może być mierzona podobieństwem wytwarzanych produktów: im własności produktów są do siebie bardziej zbliżone, tym bardziej stabilna jest praca maszyny. Podobieństwo takie jest wyrażane wariancją cechy. Zatem stabilność pracy można wyrazić liczbowo jako wariancję interesującej cechy produktu, a problem stabilności jako zagadnienie weryfikacji hipotezy $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Technika statystyczna
Test F (poziom istotności $\alpha = 0.10$)

Obliczenia

$$F_{\text{emp}} = \frac{s_2^2}{s_1^2} = 1.051$$

Wartość krytyczna $F\,(0.05; 19, 24) = 2.114$

Odpowiedź: hipotezy nie odrzucamy

Wniosek: można uznać że maszyna nie rozregulowała się w trakcie pracy

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$$

Test F (poziom istotności α)

Statystyka testowa

$$F_{\text{emp}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Wartość krytyczna $F\left(\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$

Jeżeli $F_{\text{emp}} > F\left(\alpha; n_1 - 1, n_2 - 1\right)$
to hipotezę $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ odrzucamy

Uwaga
W tym przypadku zasada „większa wariancja do licznika” nie ma sensu.

Porównanie dwóch rozkładów dwupunktowych

Założenia:
1. $X_1 \sim D(p_1), X_2 \sim D(p_2)$
2. X_1, X_2 są niezależne

$$H_0 : p_1 = p_2$$

Test przybliżony (poziom istotności α)

$$\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}, \quad \hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}, \quad \hat{p} = \frac{(k_1 + k_2)}{(n_1 + n_2)}$$

Statystyka testowa

$$u_{\text{emp}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$|u_{\text{emp}}| \geq u_{1-\alpha/2} \Longrightarrow H_0 : p_1 = p_2$ odrzucamy

Przykład. Celem badania było porównanie przygotowania z matematyki kandydatów na studia będących absolwentami liceów oraz techników. W tym celu spośród kandydatów zdających matematykę wylosowano 400 absolwentów liceów oraz 600 absolwentów techników. W wylosowanej grupie stwierdzono, że 385 absolwentów liceów oraz 501 absolwentów techników rozwiązało test wstępny. Czy można na tej podstawie sądzić, że przygotowanie w obu grupach absolwentów jest jednakowe?

Populacja 1:
absolwenci liceów zdający egzamin wstępny
Populacja 2:
absolwenci techników zdający egzamin wstępny

Cecha X: umiejętność rozwiązania testu (tak/nie)

Założenia:
cecha X ma w populacji 1 rozkład $D(p_1)$
cecha X ma w populacji 2 rozkład $D(p_2)$

Formalizacja
Weryfikacja hipotezy $H_0 : p_1 = p_2$

Technika statystyczna
Test przybliżony (poziom istotności $\alpha = 0.05$)

Obliczenia

$$n_1 = 400 \quad k_1 = 385 \quad \hat{p}_1 = 385/400 = 0.9625$$

$$n_2 = 600 \quad k_2 = 501 \quad \hat{p}_2 = 501/600 = 0.8350$$

$$\hat{p} = (385 + 501)/(400 + 600) = 0.886$$

$$u_{\mathrm{emp}} = \frac{0.9625 - 0.8350}{\sqrt{0.886(1 - 0.886)\left(\frac{1}{400} + \frac{1}{600}\right)}} = 6.215.$$

Wartość krytyczna $u_{0.975} = 1.96$

Odpowiedź: hipotezę $H_0 : p_1 = p_2$ odrzucamy

Wniosek:
przygotowanie absolwentów liceów i techników z matematyki nie jest takie same.

$$H_0 : p_1 \leq p_2$$

Test przybliżony (poziom istotności α)

$$\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}, \quad \hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}, \quad \hat{p} = \frac{(k_1 + k_2)}{(n_1 + n_2)}$$

Statystyka testowa

$$u_{\mathrm{emp}} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$u_{\mathrm{emp}} \geq u_{1-\alpha} \Longrightarrow H_0 : p_1 \leq p_2$ odrzucamy