Współczynnik korelacji

Współczynnik korelacji jest miernikiem zależności między dwiema cechami
Oznaczenie: ϱ

Własności współczynnika korelacji

1. Współczynnik korelacji jest liczbą niemianowaną

2. $\varrho \in \langle -1, 1 \rangle$

3. Jeżeli $\varrho > 0$, to większym wartościom jednej cechy odpowiadają (średnio) większe wartości drugiej cechy. Zależność dodatnia (rosnąca, stymulująca).

4. Jeżeli $\varrho < 0$, to większym wartościom jednej cechy odpowiadają (średnio) mniejsze wartości drugiej cechy. Zależność ujemna (malejąca, limitująca).

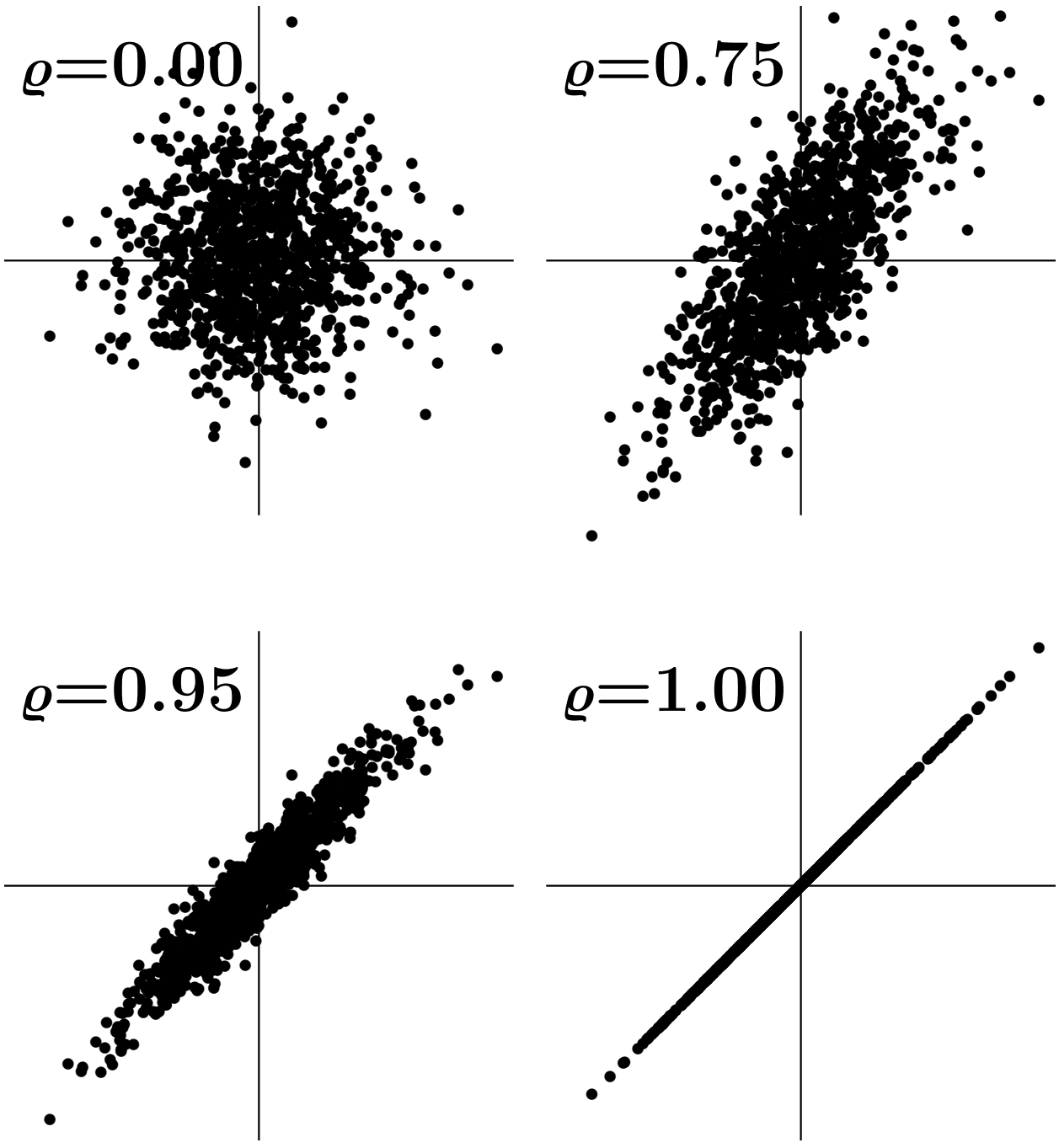
5. Jeżeli $\varrho = 0$, to bez względu na wartości przyjmowane przez jedną z cech, średnie wartości drugiej cechy są takie same. Cechy nieskorelowane.

6. Jeżeli $\varrho = \pm 1$, to istnieją takie liczby rzeczywiste a oraz b, że $Y = aX + b$. Jeżeli $\varrho = 1$, to $a > 0$. Jeżeli $\varrho = -1$, to $a < 0$.

Współczynnik korelacji jest miernikiem **liniowej** zależności między cechami X oraz Y.

Im $|\varrho|$ jest bliższe 1, tym bardziej „liniowa" jest zależność między cechami.

7. Jeżeli (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny, to $\varrho = 0$ jest równoważne **niezależności** cech X, Y.


ϱ=0.00
ϱ=0.75
ϱ=0.95
ϱ=1.00

Współczynnik korelacji między cechami X i Y

$$\varrho = \frac{\text{kowariancja}(X,Y)}{\sqrt{D^2X \cdot D^2Y}}$$

Niech $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ będzie próbą

Współczynnik korelacji z próby (próbkowy)

$$R = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}X}\sqrt{\text{var}Y}}$$

Współczynnik korelacji Pearsona
Suma iloczynów odchyleń

$$\text{cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

Kowariancja z próby

$$\text{C}(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{n-1}$$

$$H_0 : \text{Cechy } X \text{ oraz } Y \text{ są niezależne}$$
$$\Updownarrow$$
$$H_0 : \varrho = 0$$

Test współczynnika korelacji Pearsona
(poziom istotności α)

Próba: $(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n$
Statystyka testowa

$$R = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}X}\sqrt{\mathrm{var}Y}}$$

Wartość krytyczna $r(\alpha; n)$ (dwustronna)

Jeżeli $|R| > r(\alpha; n)$,
to hipotezę H_0 odrzucamy.

Ilościowy opis zależności

Zakładamy niezerowość współczynnika korelacji:

$$\varrho \neq 0$$

Ilościowy opis zależności Y od X:

$$E(Y|X = x) = f(x)$$

Funkcja f nosi nazwę **funkcji regresji**

Przy założeniu normalności

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

β_1 — współczynnik regresji
β_0 — stała regresji

Zadanie: oszacować parametry funkcji regresji

Ocena parametrów funkcji regresji

Próba $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$

Niezbędne rachunki

$$\bar{X},\ \mathrm{var}X,\ \bar{Y},\ \mathrm{var}Y,\ \mathrm{cov}(X,Y)$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}X} \qquad \widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X}$$

Resztowa suma kwadratów

$$\mathrm{var}R = \mathrm{var}Y(1 - R^2)$$

Resztowa suma kwadratów reprezentuje rozrzut obserwacji cechy Y wokół dopasowanej funkcji regresji

Wariancja resztowa

$$S^2 = \frac{\mathrm{var}R}{n-2}$$

Przedział ufności dla współczynnika regresji
(poziom ufności $1-\alpha$)

Wariancja estymatora $\widehat{\beta}_1$

$$S^2_{\beta_1} = \frac{S^2}{\mathrm{var}X}$$

Przedział ufności

$$\beta_1 \in (\widehat{\beta}_1 - t(\alpha; n-2)S_{\beta_1}; \widehat{\beta}_1 + t(\alpha; n-2)S_{\beta_1})$$

Przedział ufności dla stałej regresji
(poziom ufności $1-\alpha$)

Wariancja estymatora $\widehat{\beta}_0$

$$S^2_{\beta_0} = \frac{S^2}{\mathrm{var}X}\left(\frac{\mathrm{var}X}{n} + \bar{X}^2\right)$$

Przedział ufności

$$\beta_0 \in (\widehat{\beta}_0 - t(\alpha; n-2)S_{\beta_0}; \widehat{\beta}_0 + t(\alpha; n-2)S_{\beta_0})$$

Przykład. W pewnej rodzinie obserwowano tygodniowe wydatki na używki (Uż) i artykuły spożywcze (Sp). Na podstawie poniższych danych zbadać istnienie zależności. Jeżeli taka zależność istnieje, to opisać ją ilościowo.

Uż	Sp	Uż	Sp	Uż	Sp	Uż	Sp	Uż	Sp
28.50	45.54	26.55	44.35	28.37	44.00	38.31	42.92	22.78	45.03
23.61	45.33	21.55	45.71	28.15	44.46	21.94	46.50	25.76	45.29
31.22	43.31	20.77	46.01	36.71	43.36	32.69	43.50	22.39	45.16
36.38	42.33	25.11	46.12	29.57	44.39	34.51	43.82	28.19	44.76
35.99	42.40	26.13	43.82	29.07	45.05	39.59	41.77	29.84	44.01
38.67	42.31	19.41	46.10	27.43	44.11	29.58	44.29	30.14	43.91
19.08	46.28	27.16	45.52	39.86	41.98	27.38	44.74	28.39	44.29
28.83	43.39	27.98	44.59	34.33	43.34	33.38	43.01	40.97	42.14
35.48	42.68	30.67	44.01	41.88	41.98	28.09	44.40	21.29	46.61
24.57	45.10	28.17	43.91	26.73	44.20	33.79	43.26	26.32	44.92

Plan działania

1. Istnienie zależności
2. Ilościowy opis
3. Wnioski

Populacja:

Cechy:
X: tygodniowe wydatki na używki
Y: tygodniowe wydatki na artykuły spożywcze

Założenie:
normalność rozkładów badanych cech

Techniki statystyczne:
1. Weryfikacja hipotezy $H_0 : \varrho = 0$
2. Dopasowanie funkcji regresji $y = \beta_0 + \beta_1 x$

Poziom istotności $\alpha = 0.05$
Poziom ufności $1 - \alpha = 0.95$

Weryfikacja hipotezy $H_0 : \varrho = 0$

Obliczenie próbkowego współczynnika korelacji

$$R = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sqrt{\mathrm{var}x}\sqrt{\mathrm{var}y}}$$

$$n = 50$$

$$\bar{x} = 29.4652 \qquad \sum x_i^2 = 45067.8076$$

$$\bar{y} = 44.2002 \qquad \sum y_i^2 = 97762.2887$$

$$\sum x_i y_i = 64782.5974$$

$$\mathrm{var}x = \sum x_i^2 - n\left(\bar{x}\right)^2 = 1657.907048$$

$$\mathrm{var}y = \sum y_i^2 - n\left(\bar{y}\right)^2 = 79.404698$$

$$\mathrm{cov}(x, y) = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = -335.789252$$

Próbkowy współczynnik korelacji

$$R = \frac{-335.789252}{\sqrt{1657.907048} \cdot \sqrt{79.404698}} = -0.9255$$

Wartość krytyczna współczynnika korelacji Pearsona

$$r(0.05; 50) = 0.2787$$

Ponieważ $|R| > r(0.05; 50)$, więc hipotezę o zerowości współczynnika korelacji odrzucamy.

Wniosek.
Wydatki na używki (X) i wydatki na artykuły spożywcze (Y) są od siebie zależne. Ponieważ współczynnik korelacji jest ujemny, więc zależność ma charakter malejący, tzn. im większe są wydatki na używki, tym mniejsze (średnio) na artykuły spożywcze.

Ilościowy opis zależności

$$E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\mathrm{var}x} = \frac{-335.789252}{1657.907048} = -0.2025$$

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_0 &= \bar{y} - \widehat{\beta}_1 \bar{x} \\ &= 44.2002 - (-0.2025) \cdot 29.4652 = 50.1680\end{aligned}$$

Zależność między średnim kosztem a ilością towaru opisana jest wzorem

$$\text{średni } y = 50.1680 - 0.2025x$$

Równanie to obowiązuje tylko w zakresie między $\min x_i = 41$ a $\max x_i = 47$.

Wariancja resztowa

$$s^2 = \frac{\mathrm{var}Y(1 - R^2)}{(n - 2)} = 0.2374$$

Przedziały ufności

Wartość krytyczna $t(0.05; 48) = 2.0106$

Przedział ufności dla współczynnika regresji

$$s^2_{\beta_1} = \frac{s^2}{\mathrm{var}x} = 0.0001432$$

$$\beta_1 \in (\widehat{\beta}_1 - t(\alpha; n-2)S_{\beta_1}; \widehat{\beta}_1 + t(\alpha; n-2)S_{\beta_1})$$

$$\beta_1 \in (-0.2266, -0.1785)$$

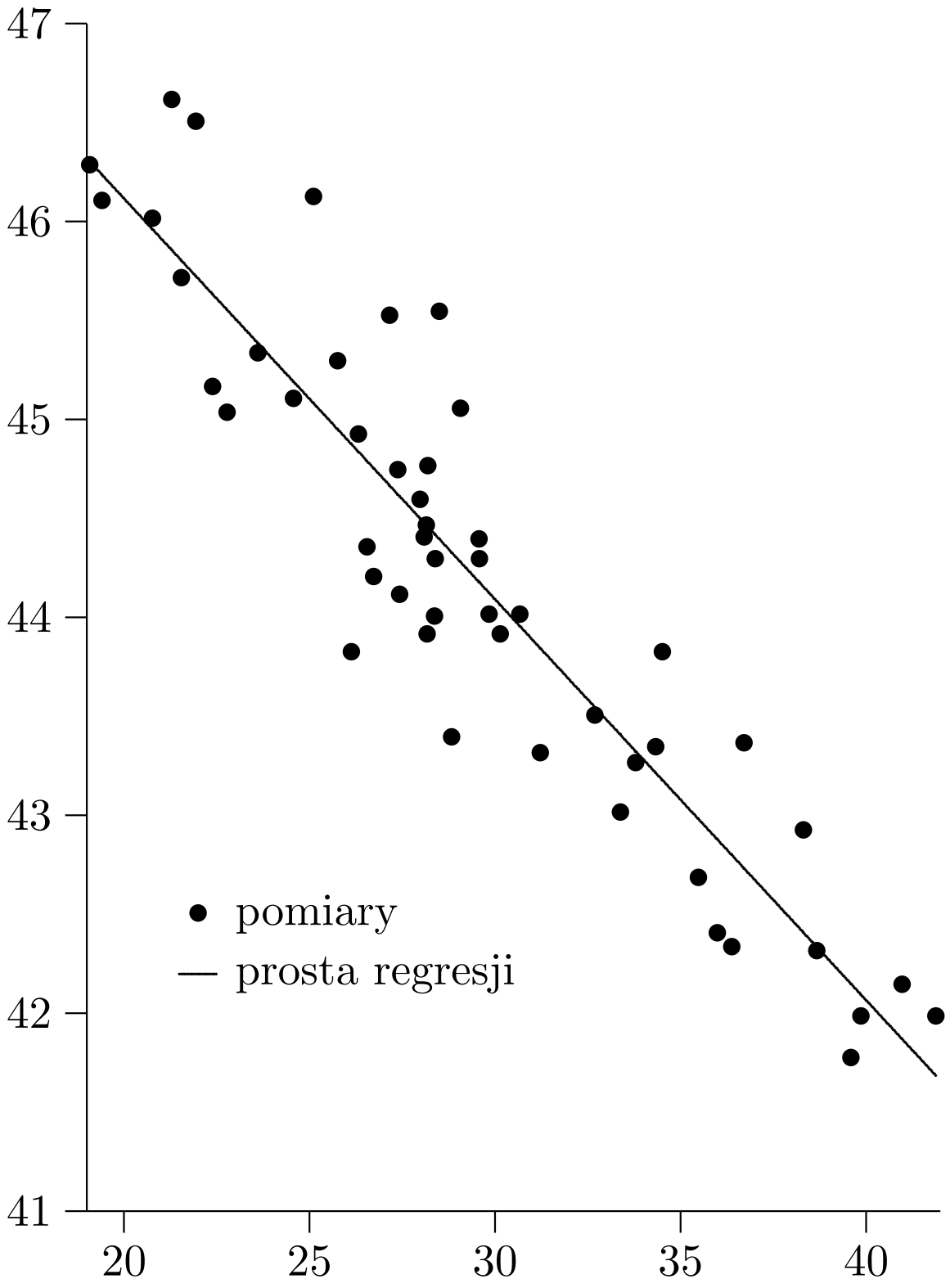
Wniosek: zwiększenie wydatków na używki o jednostkę spowoduje przeciętny spadek wydatków na artykuły spożywcze o co najmniej 0.1785, ale nie więcej niż 0.2266 (zaufanie do tak sformułowanego wniosku wynosi 95%).

Przedział ufności dla stałej regresji

$$s^2_{\beta_0} = \frac{s^2}{\mathrm{var}x}\left(\frac{\mathrm{var}x}{n} + \bar{x}^2\right) = 0.1291$$

$$\beta_0 \in (\widehat{\beta}_0 - t(\alpha; n-2)s_{\beta_0}; \widehat{\beta}_0 + t(\alpha; n-2)s_{\beta_0})$$

$$\beta_0 \in (49.4457, 50.8903)$$


47
46
45
44
43
42
41
20
25
30
35
40
pomiary
prosta regresji