Podejmowanie decyzji statystycznych

Przykład. (*Silvey 1978*) Możemy zakupić dziesięć używanych samolotów. Pewna nieznana ich ilość θ może latać 1000 godzin bez naprawy i każdy z nich daje zysk $1000z$. Każdy z pozostałych będzie wymagał naprawy co da stratę w wysokości $1000q$. Przed podjęciem decyzji za cenę $1000r$ można na 1000 godzin wypożyczyć jeden z samolotów i decyzję uzależnić od jego zachowania. Przeanalizować problem i wybrać najlepsze postępowanie.

Bierzemy samolot na próbę:

x_1 (wynik próby OK)	x_2 (wynik próby nie OK)
$P_\theta(x_1) = \theta/10$	$P_\theta(x_2) = 1 - \theta/10$

Decyzje:

$$d_1 = \text{kupić samoloty}$$
$$d_2 = \text{nie kupować samolotów}$$

Elementy teorii podejmowania decyzji

1. Zbiór obserwacji $\mathcal{X}$

2. Zbiór stanów natury Θ

3. Zbiór decyzji $\mathcal{D}$

4. Funkcja straty $L(d, \theta)$

5. Reguła decyzyjna $\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$

6. Ryzyko reguły δ: $R_\delta(\theta) = E_\theta\{L(\delta(X), \theta)\}$

Zadanie:
znaleźć regułę δ „optymalizującą” ryzyko

Optymalizacja:

1. jednostajna minimalizacja ryzyka

2. zasada minimaksu

3. reguła Beyesa

Funkcja straty

Wykonano próbę:

$$L(d_1, \theta) = r - \theta z + (10 - \theta)q$$
$$L(d_2, \theta) = r \text{ dla wszystkich } \theta$$

Nie wykonywano próby:

$$L(d_1, \theta) = -\theta z + (10 - \theta)q$$
$$L(d_2, \theta) = 0 \text{ dla wszystkich } \theta$$

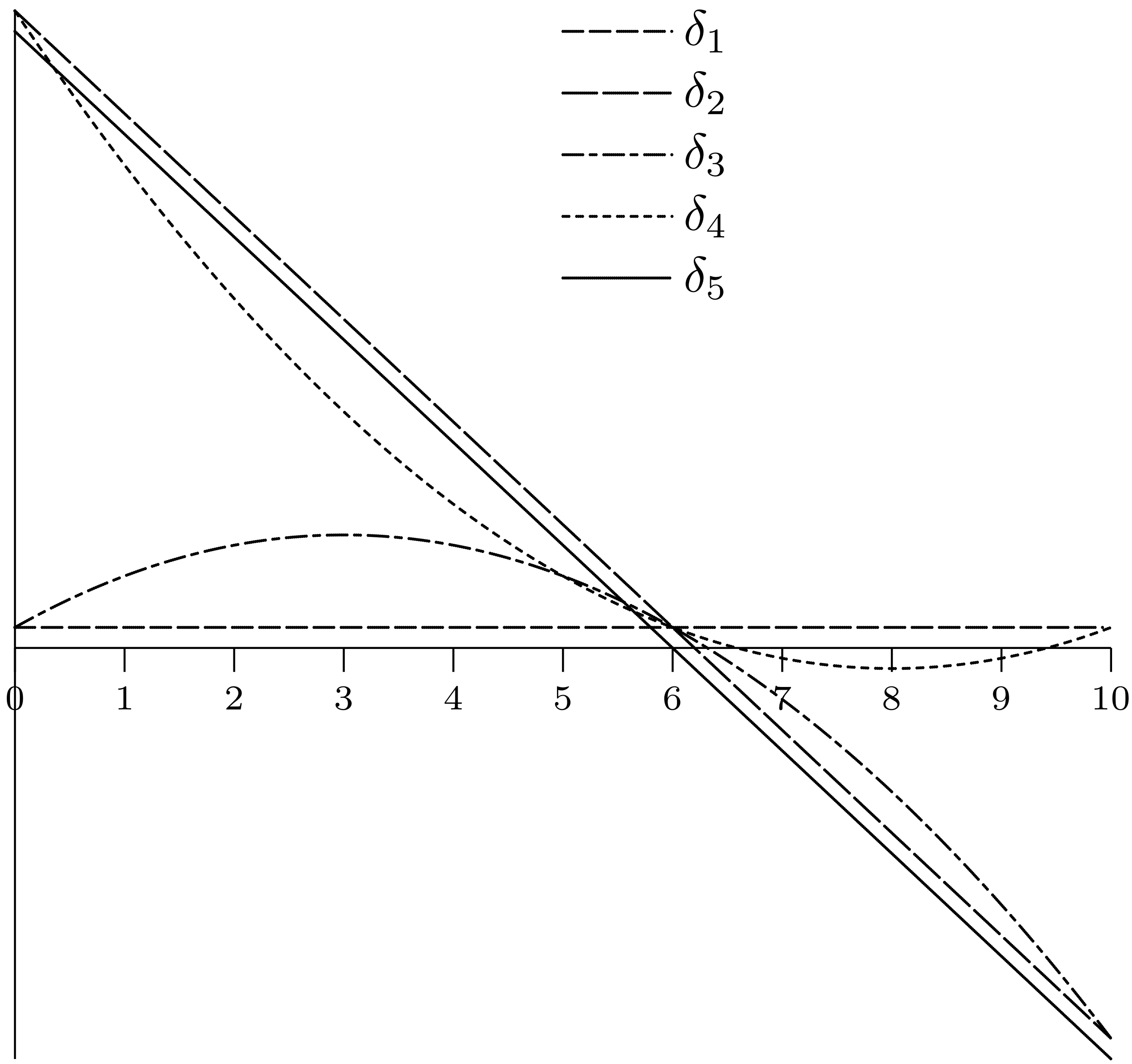
Postępowania (reguły decyzyjne)

	wynik próby OK	wynik próby nie OK
δ_1	nie kupować	nie kupować
δ_2	kupić	kupić
δ_3	kupić	nie kupować
δ_4	nie kupować	kupić
δ_5	kupić nie próbując	
δ_6	nie kupować nie próbując	

Ryzyko reguły decyzyjnej (oczekiwana strata)

<table>
<tr><th></th><th>x_1 $(P_\theta(x_1) = \theta/10)$</th><th>$x_2$ $(P_\theta(x_2) = 1 - \theta/10)$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">δ_1</td><td>$\delta_1(x_1) = d_2$
$L\{\delta_1(x_1), \theta\} = r$</td><td>$\delta_1(x_2) = d_2$
$L\{\delta_1(x_1), \theta\} = r$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R_{\delta_1}(\theta) = r$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">δ_2</td><td>$\delta_2(x_1) = d_1$
$L\{\delta_2(x_1), \theta\}$
$= r - \theta z + (10 - \theta)q$</td><td>$\delta_2(x_2) = d_1$
$L\{\delta_2(x_1), \theta\}$
$= r - \theta z + (10 - \theta)q$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R_{\delta_2}(\theta) = r - \theta z + (10 - \theta)q$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">δ_3</td><td>$\delta_3(x_1) = d_1$
$L\{\delta_3(x_1), \theta\}$
$= r - \theta z + (10 - \theta)q$</td><td>$\delta_3(x_2) = d_2$
$L\{\delta_3(x_2), \theta\} = r$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R_{\delta_3}(\theta) = \frac{\theta}{10}\{r - \theta z + (10 - \theta)q\} + \left[1 - \frac{\theta}{10}\right] r$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">δ_4</td><td>$\delta_4(x_1) = d_2$
$L\{\delta_4(x_1), \theta\} = r$</td><td>$\delta_4(x_2) = d_1$
$L\{\delta_4(x_2), \theta\}$
$= r - \theta z + (10 - \theta)q$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R_{\delta_4}(\theta) = \frac{\theta}{10} r + \left[1 - \frac{\theta}{10}\right]\{r - \theta z + (10 - \theta)q\}$</td></tr>
</table>

$$R_{\delta_5}(\theta) = -\theta z + (10-\theta)q, \qquad R_{\delta_6}(\theta) = 0$$



Zasada minimaksu

$$z = 0.2 \quad q = 0.3 \quad r = 0.1$$

	maksimum straty
δ_1	$\max_\theta R_{\delta_1}(\theta) = 0.1$
δ_2	$\max_\theta R_{\delta_2}(\theta) = R_{\delta_2}(0) = 3.1$
δ_3	$\max_\theta R_{\delta_3}(\theta) = R_{\delta_3}(3) = 0.55$
δ_4	$\max_\theta R_{\delta_4}(\theta) = R_{\delta_4}(0) = 3.1$
δ_5	$\max_\theta R_{\delta_5}(\theta) = R_{\delta_5}(0) = 3.0$
δ_6	$\max_\theta R_{\delta_6}(\theta) = 0$

Zasada bayesowska

$$P\{\theta = i\} = p_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

$$\text{Średnie ryzyko reguły } \delta = \sum_{i=0}^{10} R_\delta(\theta = i) p_i$$

$$P\{\theta = i\} = \frac{1}{11}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

	średnie ryzyko		
	$z = 0.20$ $q = 0.30$ $r = 0.10$	$z = 0.20$ $q = 0.05$ $r = 0.10$	$z = 0.2$ $q = 0.5$ $r = 0.1$
δ_1	0.10	0.100	0.10
δ_2	0.60	−0.650	1.60
δ_3	−0.15	−0.525	0.15
δ_4	0.85	−0.025	1.55
δ_5	0.50	−0.750	1.50
δ_6	0.00	0.000	0.00